不分明化拓扑空间

张广济　编著

大连海事大学出版社



BUFENMINGHUATUOPUKONGJIAN
ZHANG GUANG JI BIANZHU
DALIAN HAISHI DAXUE CHUBANSHE

FENGMIAN SHEJI ZHANG NA
封面设计：张娜

ISBN 7-5632-1261-2
O·79 定价：20.00元

不分明化拓扑空间

张广济　编著

大连海事大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

不分明化拓扑空间/张广济编著. - 大连:大连海事大学出版社,1999.3
ISBN 7-5632-1261-2

Ⅰ.不… Ⅱ.①张… Ⅲ.拓扑空间 Ⅳ.0189.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 40542 号

大连海事大学出版社出版
(大连市凌水桥　邮政编码 116026　电话 4684394)
大连海事大学印刷厂印刷　　大连海事大学出版社发行
1999 年 3 月第 1 版　　1999 年 3 月第 1 次印刷
开本:850×1168　1/32　　印张:8
字数:194 千字　　印数:1～500 册
责任编辑:刘宗德　　封面设计:张　娜
定价: 20.00 元

本书由
中共大连市委、大连市人民政府资助出版

The published book is sponsored
by the Dalian Municipal Government

前　　言

1965年L.A.Zadeh首先引入了不分明集，在此基础上1968年C.L.Chang提出了Fuzzy拓扑空间概念的第一篇论文，展开了对Fuzzy拓扑学(即不分明拓扑学)的研究。其后的二十年间，经过C.K.Wong, R. Lowen, R. H. Warren, R. Hutton以及我国的蒲保明、刘应明、王国俊等海内外学人的共同努力，分别讨论了Fuzzy拓扑学的各个专题，使Fuzzy拓扑学从起初的模仿性研究走上了创新的道路。层次结构的特点使它具有了不同于一般拓扑学的特有风格，与完备格代数结构的紧密联系又赋予了它以新的生命力。它从幼稚变得成熟，从肤浅走向深度。作为一门独立的学科，可以说它已经是根深叶茂了。

然而，在上述学者的论文中，一个Fuzzy拓扑空间都被定义为对于有限交和任意并运算封闭的不分明集族。不难看出，他们还都是以传统的方式来研究不分明专题的。一个新奇的方法是使用不分明化的方法，更确切地说，是用不分明逻辑的语义方法来讨论不分明拓扑。不分明化拓扑便是近年来在此基础上发展起来的一个新的研究领域。

集合是现代数学的基本概念，点集拓扑把几何图形看作点的集合，再把集合看作一个用某规律连结其中元素的空间。不分明集合一提出，“不分明”观念也渗透到许多数学分支。不分明拓扑便是经典点集拓扑向不分明集范畴移植的结果，不分明拓扑在国内有众多的研究者，发展很快。其他还有不分明线性空间，不分明逻辑，不分明映射，不分明控制等等，不一而足。

集合论可看作为数理逻辑的一个分支，也是一门现代数学，是

各个数学分支的共同语言和基础。数理逻辑是研究推理逻辑的，采用数学符号化的方法给出推理规则来建立推理体系。在数理逻辑中研究的主要对象是各种演算。演算这一概念包括这样的基本成份：此演算的（形式）语言，此演算的公理、推理规则。演算的这一概念容许我们对证明这个概念给出严格数学定义，并获得关于证明某理论的这个或那个命题的不可能性的精确叙述。演算的研究组成了数理逻辑的语法部分。在演算中证明的（语法）概念的更深入研究形成了数理逻辑的一个独立分支，通常称为证明论。与演算的语法研究的同时，还有数理逻辑的形式语言的语义研究。语义的基本概念是一个形式语言的表达式（公式、矢列等等）的真性这一概念。语义概念也得到了精确的数学定义，它使得有可能对各种真性概念作出系统的严格的研究。谓词演算语言的传统的语义组成了数理逻辑的一个很丰富的分支。演算使得数学和其他科学的很多部分能够形式化。上面提到的命题演算和谓词演算是有关正确推理规律最古老的科学逻辑的形式化。这些形式化的创立和研究在逻辑作为一门科学的发展中是一个重要的阶段。正是集合理论形式刻划的可能性对数学显得特别重要。形式刻划"素扑"集论的基本结构的演算原来是如此的丰富，以致使得出现在现实数学实践中的任意集论的论证都可在这个演算中形式地重新构造出。经典逻辑称为二值逻辑。取不分明命题的真值为[0,1]中的数的不分明逻辑称为连续值逻辑。基于连续值逻辑上的拓扑便称为不分明化拓扑。不分明化拓扑是用对于不分明谓词所规定的逻辑演算来构造点集拓扑中集论的论证。这些逻辑演算的基本公式我们将在第零章：不分明逻辑中予以介绍。

不分明化拓扑的成果属于我国数学家应明生和沈继忠等人，不分明化拓扑学也是数学领域中的一个年轻的分支。应明生于1991年发表在《Fuzzy Sets and System》的第一篇论文"A new approach for fuzzy topology"开创了不分明拓扑的一个新的方向。其

后，应明生、沈继忠的多篇论文在逻辑的语义的框架下分别深入地讨论了紧性、分离性、连通性、一致性、仿紧性、拓扑群等拓扑学中的重要内容。作者也用逻辑的语义的方法刻划了拓扑学中半开集、半连函数，θ—闭包、S—紧性、S—闭性、S—分离性等内容。尽管不分明化拓扑的研究方兴未艾，但短短的五、六年间，不分明化拓扑已形成了较完整的体系。能较系统地介绍不分明拓扑学中这样一个新的方向——不分明化拓扑是作者的心愿。但以作者的水平而论，实不敢担当撰写第一本介绍不分明化拓扑的专著。几经犹豫，终下定决心写出了这本小册子。本书的内容是参照应明生、沈继忠等人发表在国内外的不分明化拓扑学的学术论文（本书直接引用了他们公开发表的许多重要成果）及作者本人的某些研究成果综合而成的，疏漏之处一定不在少数，所以作者恳切希望各位学者多多赐教，特别是本书介绍的理论有许多都正在发展之中。作者非常希望本书能起到抛砖引玉的作用，以期在近年内能见到更好的专著出版。

我们在上面谈到，不分明化拓扑是用逻辑的语义的方法来讨论不分明拓扑，是不分明拓扑的一个新的方向。同时也谈到出现在现实数学实践中的任意集论的论证都可在逻辑的演算中形式地重新构造出来。因此，逻辑的语义的方法也适用于其他一些不分明数学分支的讨论。比如应用于不分明群的讨论中便产生了不分明化群的理论（我们也做为附录安排在书末）。我们相信，这一理论将在现代数学领域中产生较大的影响。我们期待着更多的关于不分明化理论的数学论文和专著问世。

大连市学术专著资助出版评审委员会对本书给予了肯定并列入大连市（1998 年上半年）优秀学术专著给予出版资助。本书的出版同时也得到了大连大学的资助，在此作者表示衷心的感谢！

目　录

第零章　不分明逻辑

§1　预备知识

在介绍不分明逻辑之前，首先回顾一下普通逻辑中关于命题及其逻辑演算的基本知识。

意义明确且能判断其真假的陈述向叫做命题，常用大写字母 P,Q,R,S 等表示，如 P：张君是大学生，就是个命题。

设 $\mathscr{U}$ 为一些命题的集合，作映射

$$T:\mathscr{U}\to\{0,1\},P\mapsto T(P)=\begin{cases}1,P\ \text{真}\\0,P\ \text{假}\end{cases}$$

称 $T(P)$ 为命题 P 的真值。

考虑这样一个陈述句："x 是大学生"。由于 x 是变元，无法判定其真假，它不是个命题；如果将某一个具体对象 x_0 赋于 x，那么"x_0 是大学生"便是个命题。这种陈述句叫做谓词，x 称为个体变元，它是句子的主语，"是大学生"是谓语，可用符号 $H(x)$ 来表示"x 是大学生"。

谓词可视为一个命题函数：

$$H:X\to\mathscr{U},x_0\mapsto H(x_0)$$

其中 X 为与之有关的对象集，它是个体变元的变化范围，通常我们称其为论域。令

$H^*:=\{x\in X|T(H(x))=1\}$

显然 $H^*\in\mathscr{P}(X)$，称集合 H^* 为谓词 H 的集合表示或称为真域，为了简便将 H^* 仍记为 H。

同理，陈述句"x 与 y 谈话"也是一个谓词，它的个体变元（即

主语)是 x 和 y，谓语是“谈话”，可用符号 $R(x,y)$ 来表示，称之为二元谓词，它的集合表示是一个二元关系：

$$R:=\{(x,y)\in X\times Y \mid T(R(x,y))=1\}$$

显然 $R\in\mathscr{P}(X\times Y)$，这里 X、Y 均为论域。

类似地还有三元谓词，四元谓词等。

设 $\mathscr{U}$ 为一些命题组成的集合，在 $\mathscr{U}$ 中规定逻辑演算：非运算，记为 $\neg$；或运算，记为 $\vee$；且运算，记为 $\wedge$；蕴涵运算，记为 $\rightarrow$；等价运算，记为 $\leftrightarrow$；除了 $\neg$ 为一元运算外，其它四种均为二元运算：

(1) $\neg:\mathscr{U}\rightarrow\mathscr{U}, P\mapsto\neg P$，其真值表达式为

$$T(\neg P):=1-T(P)$$

(2) $\vee:\mathscr{U}\times\mathscr{U}\rightarrow\mathscr{U}, (P,Q)\mapsto P\vee Q$，真值

$$T(P\vee Q):=T(P)\vee T(Q)$$

(3) $\wedge:\mathscr{U}\times\mathscr{U}\rightarrow\mathscr{U}, (P,Q)\rightarrow P\wedge Q$，真值

$$T(P\wedge Q):=T(P)\wedge T(Q)$$

这三个运算的演算法则可由下面的真值表 1 和表 2 唯一确定。

表 1　真值表

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 2　真值表

P	Q	$P\vee Q$	$P\wedge Q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

此外，不难验证 $(\mathscr{U},\vee,\wedge,\neg)$ 构成一个布尔代数。

(4) $\rightarrow:\mathscr{U}\times\mathscr{U}\mapsto\mathscr{U}, (P,Q)\mapsto P\rightarrow Q$，读作“若 P 则 Q”，其真值表见表 3。注意，真值表相同的命题被看作相等的命题。从表 3 可以看出：

$$P\to Q=\neg P\vee Q=\neg P\vee(P\wedge Q)$$

(5) $\leftrightarrow:\mathscr{U}\times\mathscr{U}\to\mathscr{U},(P,Q)\mapsto P\leftrightarrow Q$，读作“$P$ 等价于 Q”，其真值表见表 4，从该表可以看出：

$$\begin{aligned}P\leftrightarrow Q&=(P\to Q)\wedge(Q\to P)\\&=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)\end{aligned}$$

表 3　真值表

P	Q	$P\to Q$	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$\neg P\vee(P\wedge Q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

表 4　真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

如同上述命题逻辑演算一样，亦可规定谓词的逻辑演算 $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\to$，$\leftrightarrow$。当它们的个体变元取定值时，就变成命题的逻辑演算。谓词可由集合来表示，谓词的逻辑演算 $\vee$，$\wedge$，$\neg$ 与集合运算 $\cup$，$\cap$，$\sim$ 相对应。比如，$H(x)\wedge P(x)$ 对应集合 $H\cap P$，$H(x)\vee R(x,y)$ 对应集合 $(H\times Y)\cup R$，$\neg S(x,y)\wedge R(y,z)$，对应集合 $((\sim S)\times Z)\cap(X\times R)$。

下面介绍命题公式与谓词公式。

$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$这些逻辑演算称为联结词。不包含任何联结词的命题叫做原子命题，至少包含一个联结词的命题称为复合命题。

设 P 和 Q 是任意两个命题，则$\neg P, P \vee Q, (P \vee Q) \vee (P \rightarrow Q), P \leftrightarrow (Q \vee \neg P)$等都是复合命题。

若 P 和 Q 都是命题变元，则上述各式均称作命题公式，P 和 Q 叫做命题公式的分量。

命题公式是没有真假值的，只有当一个命题公式中的命题变元用确定的命题代入时，才得到一个命题。这个命题的真值依赖于代换变元的那些命题的真值。

此外，并不是由命题变元，联结词和一些括号组成的字符串都能成为命题公式。下面是命题演算的合式公式的递归定义：

(1)单个命题变元本身(即原子命题)是一个合式公式；

(2)如果 P 是合式公式，那么$\neg P$ 也是合式公式；

(3)如果 P 和 Q 是合式公式，那么 $P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$ 都是合式公式；

(4)当且仅当能够有限次使用上述(1)，(2)，(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式。

由原子命题 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 生成的合式可记作 $F(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，其中 P_i 是命题变元($i = 1, 2 \cdots, n$)。

谓词不同于命题在于谓词有个体变无 $x, y, \cdots$。在介绍谓词公式之前，先介绍两种量词，它们是对个体变元的约束：

(1)全称量词$\forall$：$\forall x$(对所有的 x)；

(2)存在量词$\exists$：$\exists x$(存在一个 x)。

我们来看几个例子：

(1)设 $P(x, y)$表示“x 与 y 有关系 P”，则$(\forall x)P(x, y)$表示“对任意 x，x 与 y 有关系 P”，即“所有的 x 都与 y 有关系 P”，这里 x 是约束变元，y 是自由变元；只要对自由变元取一固定值 y_0，那

么$(\forall x)P(x,y_0)$就是一个命题，即"所有的 x 都与 y_0 有关系 P"。

(2)设 $P(x)$表示"x 是人"，$F(x,y)$表示"x 是 y 的父亲"，$M(x,y)$表示"x 是 y 的母亲"，那么谓词"x 是 y 的外祖父"可表示为

$$(\exists z)(P(z) \wedge F(x,z) \wedge M(z,y))$$

其中 z 是约束变元，x,y 是自由变元；只要取定 $x=x_0, y=y_0$，上式便是一个命题，即"x_0 是 y_0 的外祖父"。

(3)假设 $M(x)$表示"x 是人"，$A(x)$表示"x 步行"，$B(x)$表示"x 骑自行车"，$C(x)$表示"x 口渴"，$W(x,y)$表示"x 饮 y"，$H(y)$表示"y 是泉水"，则命题"任何人，如果他步行或骑自行车且口渴，那么他一定饮泉水"，可用如下的谓词公式表示：

$(\forall x)((M(x) \wedge (A(x) \vee B(x)) \wedge C(x)) \rightarrow (\exists y)(H(y) \wedge W(x,y)))$因为，$x,y$ 都是约束变元，故以上谓词公式是一个命题，可以把命题视为不具有自由变元的谓词。

n 元谓词公式$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为原子谓词公式，如果它不能分解，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为客体变元，因此原子谓词公式包括下述形式的各种特例，如：Q，$P(x)$，$P(x,y)$，$P(f(x),y)$，$P(x,y,z)$，$P(a,y)$等。

下面给出谓词演算的合式公式的递归定义：

(1)原子谓词公式是合式公式。

(2)若 P 是合式公式，则$\neg P$ 也是一个合式公式。

(3)若 P 和Q 都是合式公式，则 $P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \rightarrow Q$，$P \leftrightarrow Q$ 都是合式公式。

(4)若 P 是合式公式，x 是P 中出现的任何变元，则$(\forall x)P$ 和$(\exists x)P$ 都是合式公式。

(5)只有经过有限次地使用规则(1)，(2)，(3)，(4)所得到的公式是合式公式。

谓词合式公式简称为谓词公式。

设 $F(p_1,p_2,\cdots,p_n)$为命题公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为命题变元，F 的真值$T(F)$可表示为一个布尔函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_i = T(p_i)\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，即

$$f:\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\}$$
$$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto f(x_1,\cdots,x_n)$$

如果对于$\forall(x_1,x_2,\cdots x_n)\in\{0,1\}^n$，恒有

$$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

那么相应的命题公式 $F_1(p_1,p_2,\cdots,p_n)$与 $F_2(p_1,p_2,\cdots p_n)$对一切变元$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$来说，它们的真值相等，这时我们称 $F_1(p_1,p_2,\cdots,p_n)$与 $F_2(p_1,p_2,\cdots,p_n)$是等价命题；等价命题被视为同一命题，记为 $F_1(p_1,p_2,\cdots,p_n)=F_2(p_1,p_2,\cdots,p_n)$。

对于谓词公式，当取定个体变元后，它对应一个布尔函数。

设 $F(p_1,p_2,\cdots,p_n)$为命题公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为命题变化。若将命题变元代入任何确定的命题，均有 $T(F)=1$，则称 F 为永真式(重言式，即定理)；若将命题变元用任何确定的命题取代，恒有 $T(F)=0$，则称 F 为永假式(矛盾式)。

永真式对应的布尔函数 $f\equiv1$，永假式对应的布尔函数 $f\equiv0$。

设 $F(P_1(y_1,y_2,\cdots,y_m),\cdots,p_n(y_1,y_2,\cdots,y_m))$为谓词公式，$P_1(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$P_2(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$\cdots P_n(y_1,y_2,\cdots,y_m)$为谓词变元，$y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为个体变元。如果对所有谓词变元都取确定的谓词，且对所有个体变元都代以确定的对象，那么就叫做给出谓词公式的一次指派。我们用 E 表示F 的一切指派所组成的集合。

如果对于 E 中的一切指派，所得到的命题都真，则称 F 是永真谓词公式(定理)；若对 E 中一切指派，所得到的命题都假，则称 F 是永假谓词公式，永真谓词公式 F，表示为$\vdash F$。

如果对于 E 有一个子集E'中的一切指派，所得到的命题都

真，则称 F 在E'中永真（即在 E'范围内是定理）；若对 E'中的一切指派，所得命题都假，则称 F 在E'中永假。

对于一个命题，有许多命题可以与之等价，我们希望从这些等价的命题中找出一个较简单的命题，这就是命题的化简，命题范式是命题简化中的一种标准形式。

设 $F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$为命题公式，我们来定 F 的范式与主范式如下：

(1)如果一个命题公式 Q 与F 等价，且 Q 且有形式：

$$Q = \bigvee_{i=1}^{m} (\bigwedge_{j=1}^{l} P_{ij})$$

其中 P_{ij}是某一命题变元A_k 或其否定命题$\neg A_k$，则称 Q 为F 的析取范式；

(2)如果一个命题公式 Q 与F 等价，且 Q 具有形式：

$$Q = \bigwedge_{i=1}^{m} (\bigvee_{j=1}^{l} P_{ij})$$

其中 P_{ij}是某一命题变元A_k 或其否定命题$\neg A_k$，则称 Q 为F 的合取范式；

(3)在析取范式中，称 $Q_i = \bigwedge_{j=1}^{l} P_{ij}$为基本积；在某基本积中，如果每一变元 A_k 与其否定$\neg A_k$ 不同时存在，且两者之一必出现一次且仅出现一次，则该基本积被称为极小项。一个只含极小项的析取范式叫做主析取范式：

(4)在合取范式中，称 $Q_i = \bigvee_{j=1}^{l} P_{ij}$为基本和；在某基本和中，如果每个变元 A_k 与其否定$\neg A_k$ 不同时存在，且两者之一必出现一次且仅出现一次，那么该基本和就叫做极大项。一个只含极大项的合取范式称为主合取范式。

一个命题的主析取范式与主合取范式是唯一存在的。命题的化简就是要将命题简化为主析取范式或主合取范式。通常是采用布尔函数的化简来达到命题化简的目的。事实上，任何一个命题

公式 $F(A_1,A_2,\cdots A_n)$都对应一个布尔函数:

$$f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$$

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=T(F)$$

注意到,$x_i=T(A_i)$,故命题 A_i 对应$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv x_i$;另外,恒真式,恒假式分别对应 $f_T(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv 1$ 与 $f_F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv 0$,因此,$0,1,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 应该是最简单的布尔函数。

对照命题合式公式的递归定义,我们来递归定义布尔函数:

设 $BE\subseteq\{0,1\}^{\{0,1\}^n}$,即$\{0,1\}^n$ 到$\{0.1\}$映射全体的一个子集(一个函数类),若满足:

(1)$0,1,x_1,x_2,\cdots,x_n\in BE$;(这里 x_i 表示函数$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i$,它对应命题变元 A_i,即 $T(A_i)=x_i$;0,1 分别对应永假命题与永真命题,它们表示函数 $f_F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv 0$,$f_T(x_1,x_2,\cdots,x_n\equiv 1$;

(2)如果 $f\in BE$,那么$\neg f=1-f\in BE$

(3)如果 $f,g\in BE$,那么 $f\vee g,f\wedge g\in BE$;

(4)BE 是满足上述(1),(2),(3)的最小类,我们就称 $f\in BE$ 为 n 个变元的布尔函数。

仿照命题的主析取范式和主合取范式,不难看出,布尔函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的主析取范式具有形式:

$$f=\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n}x_k^{(i)}),$$

这里 $x_k^{(i)}\in\{x_k,\bar{x}_k\}$,$\bar{x}_k=\neg x_k=1-x_k$;$x_k=T(A_k)$(从而 $\bar{x}_k=T(\neg A_k)$),$k=1,2,\cdots,n$;

布尔函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的主合取范式具有形式:

$$f=\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{k=1}^{n}x_k^{(i)})$$

其中 $x_k^{(i)}\in\{x_k,\bar{x}_k\}$,$k=1,2,\cdots,n$。

我们称 $x_k,\bar{x}_k(k=1,2,\cdots,n)$为字,称字的基本积 $x_{k_1}\wedge x_{k_2}$

$\wedge \cdots \wedge x_{k_i}'$为字组，称字的基本和 $x_{k_1}' \vee x_{k_2}' \cdots \vee x_{k_i}'$ 为子句；这里 x_{k_j}' $\in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\}$。

下面是化简布尔函数的基本步骤：

(1)利用布尔运算，先将布尔函数 f 写成析取式

$$f = \bigvee_{i=1}^{m} (\bigwedge_{j=1}^{l} P_{ij}, p_{ij} \in \{x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\};$$

(2)删去 x_k 与 $\bar{x}_k$ 同时出现的项(因为 $x_k \wedge \bar{x}_k = 0$)；

(3)若在某一字组 $q_i = \bigwedge_{j=1}^{l} p_{ij}$ 中，x_k 与 $\bar{x}_k$ 均不存在，则将 q_i 化为

$$\begin{aligned} q_i &= q_i \wedge 1 = q_i \wedge (x_k \vee \bar{x}_k) \\ &= (x_k \wedge p_{i1} \wedge \cdots \wedge p_{il}) \vee (\bar{x}_k \wedge p_{i1} \wedge \cdots \wedge p_{il}); \end{aligned}$$

(4)若在某一字组 $q_i = \bigwedge_{j=1}^{l} p_{ij}$ 中，某 x_k 出现不止一次(或 $\bar{x}_k$ 出现不止一次)，则利用幂等律只保留一个 x_k(或只保留一个 $\bar{x}_k$)；

(5)如果有两项相同，那么利用幂等律只保留一项，这样便最终得到 f 的主析取范式。

至于主合取范式，可以这样求出：先求出$\neg f$ 的主析取范式

$$\neg f = \bigvee_{i=1}^{m} (\bigwedge_{k=1}^{n} x_k^{(i)}$$

于是容易得到 f 的主合取范式：

$$f = \neg (\neg f) = \bigwedge_{i=1}^{m} (\bigvee_{k=1}^{n} \neg x_k^{(i)})$$

我们来看一个具体的例子：设 S 是命题公式$(\neg P \to R) \wedge (Q \leftrightarrow P)$，求主析取范式。首先，

$$\begin{aligned} S &= (\neg P \to R) \wedge (Q \leftrightarrow P) \\ &= (\neg (\neg P) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) \\ &= (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) \end{aligned}$$

让 x_1, x_2, x_3 分别对应变元 P、Q、R，这样 S 便对应布尔函数：

$$f = (x_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$$

$$=((x_1\wedge(\bar{x}_2\vee x_1))\vee(x_3\wedge(\bar{x}_2\vee x_1)))\wedge(\bar{x}_1\vee x_2)$$
$$=((x_1\wedge\bar{x}_2)\vee(x_1\wedge x_1)\vee(x_3\wedge(\bar{x}_2)\vee(x_3\wedge x_1)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2)$$
$$=(((x_1\wedge\bar{x}_2)\vee x_1\vee(x_3\wedge\bar{x}_2)\vee(x_3\wedge x_1)\wedge\bar{x}_1)\vee(((x_1\wedge\bar{x}_2)\vee x_1\vee(x_3\wedge\bar{x}_2)\vee(x_3\wedge x_1))\wedge x_2)$$
$$=(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_1)\vee(x_1\wedge\bar{x}_1)\vee(x_3\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_1)\vee(x_3\wedge x_1\wedge\bar{x}_1)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_2)\vee(x_3\wedge\bar{x}_2\wedge x_2)\vee(x_3\wedge x_1\wedge x_2)$$
$$=(x_3\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_1)\vee(x_1\wedge x_2)\vee(x_3\wedge x_1\wedge x_2)$$
$$=(x_3\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_1)\vee(x_3\wedge x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_2)\vee(x_3\wedge\bar{x}_3))$$
$$=(x_3\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_1)\vee(x_3\wedge x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\bar{x}_3)$$
$$=(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\bar{x}_3)$$

由此可知 S 的主析取范式为

$$(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$$

§2 不分明命题与逻辑演算

我们来考虑这样的陈述句:“李莉是年轻人”。因为“年轻人”是个不分明概念,故该陈述句“李莉是年轻人”无确切的真假而言;然而这个陈述句又的确包含着真假的含义,这样的陈述句叫做不分明命题,它的真假值应取[0,1]中的数(这实际上就是我们本书所涉及的连续值逻辑,即多值逻辑的一种)。

关于无限值逻辑,设 $\mathscr{U}$ 为一些不分明命题组成的集合。作映射

$$T:\mathscr{U}\to[0,1],A\to T(A)$$

称 $T(A)$ 为不分明命题 A 的真值。

我们再考虑一下不分明谓词，比如 $\widetilde{H}(x)$表示"x 是年轻人"，那么 $\widetilde{H}(X)$是一个一元不分明谓词。若固定 $x=x_0$，则 $\widetilde{H}(x_0)$是个不分明命题。不分明谓词 $\widetilde{H}(x)$可用一个不分明集（仍用 $\widetilde{H}$ 表示）$\widetilde{H}$，把 x 对 $\widetilde{H}$ 的隶属度与其真值视为一体：$\mu_{\widetilde{H}}(x)=T(\widetilde{H}(x)$，再如，$\widetilde{R}(x,y)=$"$x$ 与 y 很相像"是一个二元不分明谓词，它可用一个二元不分明关系 $\widetilde{R}$ 来表示，其中 $\mu_{\widetilde{R}}(x,y)=T(\widetilde{R}(x,y))$。

在 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 中规定逻辑运算$\neg$（非）、$\vee$（析取）、$\wedge$（合取）：

$$T(\neg\widetilde{A})=1-T(\widetilde{A})$$

$$T(\widetilde{A}\vee\widetilde{B})=T(\widetilde{A})\vee T(\widetilde{B})$$

$$T(\widetilde{A}\wedge\widetilde{B})=T(\widetilde{A})\wedge T(\widetilde{B})$$

对于不分明谓词可同样规定逻辑演算$\vee$，$\wedge$，$\neg$，分别与它们的集合表示间的运算$\cap$，$\cup$，$\sim$相对应。如果把不分明命题看作不分明集合，那么不分明命题的逻辑演算$\vee$，$\wedge$，$\neg$ 可以看作不分明集合运算$\cap$，$\cup$，$\sim$。在$\mathscr{F}(X)$中除运算$\cup$、$\cap$外，还可以定义其它广义的并$\cup^*$与广义的交$\cap^*$运算，与此对应在不分明逻辑中也可以定义广义的$\vee^*$和$\wedge^*$的运算。常见的有

(1)概率和与概率积：

$\widetilde{A}\dot{+}\widetilde{B}:T(\widetilde{A}\dot{+}\widetilde{B}):=T(\widetilde{A})+T(\widetilde{B})-T(\widetilde{A})T(\widetilde{B})$

$\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}:T(\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}):=T(\widetilde{A})\cdot T(\widetilde{B})$

(2)有界和与有界积

$\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}:T(\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}):=\min\{T(\widetilde{A})+T(\widetilde{B})、1\}$

$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}:T(\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}):=\max\{T(\widetilde{A})+T(\widetilde{B})-1,0\}$

下面我们来介绍不分明命题公式、不分明谓词公式和不分明逻辑公式。

先给出不分明命题公式的递归定义：

(1)原子不分明命题是合式公式；

(2)若 $\widetilde{A}$ 是不分明命题合式公式，则$\neg\widetilde{A}$ 是不分明命题合式

公式；

(3)若 $\widetilde{A}$、$\widetilde{B}$ 是不分明命题合式公式，则 $\widetilde{A}\vee\widetilde{B},\widetilde{A}\wedge\widetilde{B}$ 是不分明命题合式公式。

(4)当且仅当有限次使用(1)、(2)、(3)求得的公式是不分明命题合式公式。

对不分明谓词，类似地有

(1)原子不分明谓词是合式公式；

(2)若 $\widetilde{A}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$是不分明谓词合式公式，则$\neg\widetilde{A}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，也是不分明谓词合式公式；

(3)若 $\widetilde{A}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$\widetilde{B}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$是不分明谓词合式公式，则 $\widetilde{A}(y_1,y_2,\cdots,y_m)\vee\widetilde{B}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$\widetilde{A}(y_1,y_2,\cdots,y_m)\wedge\widetilde{B}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$也是不分明谓词合式公式；

(4)若 $\widetilde{A}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$是不分明谓词合式公式，则$(\forall y_j)\widetilde{A}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$(\exists y_j)\widetilde{A}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$也是不分明谓词合式公式；

(5)当且仅当有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)求得的公式是不分明谓词合式公式。

所谓不分明逻辑公式是不分明命题的真值表达式，它是布尔函数的推广。一个不分明命题可表示成 $F(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)$，其中 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 为不分明命题变元，置 $x_k=T(\widetilde{A}_k)$，那么命题变元 $\widetilde{A}_k$ 与变元x_k 相对应。于是，不分明命题 F 可对应其真值。

$$T(F(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n))=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$f:[0,1]^n\to[0,1],(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

称 f 为真值的不分明表达式，也叫做不分明逻辑公式；下面是其严格的递归定义：

设 $FE\subseteq[0,1]^{[0,1]^n}$，我们有

(1)$0,1,x_1,x_2,\cdots,x_n\in FE$；这里 x_i 表示函数$f_i(x_1,x_2,\cdots,$

$x_n)=x_i$，它对应命题变元 $\widetilde{A}_i$，即 $T(\widetilde{A}_i)=x_i$；0，1 分别对应恒假、恒真命题，它们是函数 $f_F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv 0$，$f_T(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv 1$；

(2)若 $f\in FE$，则 $\neg f=1-f\in FE$；

(3)若 $f,g\in FE$，则 $f\vee g$，$f\wedge g\in FE$；

(4)FE 是满足(1)、(2)、(3)的最小类。

称 $f\in FE$ 为 n 元真值不分明表达式或叫做 n 元不分明逻辑公式；简称为 n 元 F-公式。

一个布尔函数在{0,1}中取值，表示命题所涉及的概念是分明的；一个不分明逻辑公式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在[0,1]中取值，这意味着所涉及的概念是不分明的，显然 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 越靠近 0 或 1，其概念越分明。为了比较它们的分明程度，我们定义一个二元"分明"关系 $C\in\mathscr{P}([0,1]^2)$：

$$(a,b)\in C(\text{记 } aCb)\Leftrightarrow a\geqslant b\geqslant\frac{1}{2}\text{ 或 } a\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}$$

称 C 为分明关系，称 aCb 为 a 分明于 b。

在$[0,1]^n$ 中定义二元关系 $C\in\mathscr{P}([0,1]^n)$

$$(a_1,\cdots a_n)C(b_1,\cdots,b_n)\Leftrightarrow a_iCb_i(i=1,2,\cdots,n)$$

称$(a_1,\cdots,a_n)$分明于$(b_1,\cdots,b_n)$。

我们可以证明不分明逻辑公式 f 具有如下性质：

$$\forall a,b\in[0,1]^n,aCc\Rightarrow f(a)Cf(b)$$

上述事实说明，不分明逻辑公式 f 中的变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的赋值越分明，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的取值越分明，对应到不分明命题公式 $F(\widetilde{A}_1、\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)$，命题变元$(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)$的真值$(T(\widetilde{A}_1),T(\widetilde{A}_2),\cdots T(\widetilde{A}_n))$越分明，即$(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)$所涉及的概念的不分明程度越小，那么真值 $T(F)$越分明，即所组成的命题 $F(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)$的不分明程度越小，这是符合实际的。

不难看到，将布尔函数中的变元$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的取值范围

从$\{0,1\}^n$扩弃到$[0,1]^n$，则布尔函数推广为不分明逻辑公式，反过来，将一个不分明逻辑公式的变元$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的取值范围限制在$\{0,1\}^n$中，不分明逻辑公式便蜕化为一个布尔函数，即若设$f\in FE$为一个n元F－公式，限制变元$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$，则$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}$。

下面讨论不分明逻辑公式的范式。为了叙述上的方便，我们把变量x_k及$\bar{x}_k$叫做字，把字的析取式$\bigvee_{i=1}^{l}p_i$（p_i是字）叫做子句，字的合取式$\bigwedge_{i=1}^{l}p_i$叫做字组；往下，p表示字，φ表示字组，ψ表示子句。

设$\varphi_i(j=1,2,\cdots,m)$为$m$个字组，作$F$—公式：

$$f=\bigvee_{j=1}^{m}\varphi_j$$

称之为折取范式。

设$\psi_j(j=1,2,\cdots,m)$为m个子句，置

$$f=\bigwedge_{j=1}^{m}\psi_j;$$

该F—公式叫做合取范式。

若$f\in FE$，即f是一个n元F—公式且$f\neq 0.1$，则f的析取范式和合取范式都存在。

上面的事实保证了不分明逻辑的折取范式和合取范式的存在性。

§3 不分明逻辑公式的化简

两个不分明命题公式等价当且仅当它们对应的不分明逻辑公式等价。因而可以通过不分明逻辑公式的化简来进行对不分明命题公式的化简。由于$(FE,\vee,\wedge,\neg)$不满足补余律，故它不是布尔代数，只是软代数，因此不分明逻辑公式化简问题与布尔函数的

化简有较大的差异。在不分明逻辑公式化简问题的研究中，关于不分明蕴涵关系及不可约元的概念是非常重要的。

设 f、$f' \in FE$ 为 n 元 F—公式，如果满足条件：

$$(\forall (x_1, \cdots x_n) \in [0,1]^n)(f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant f'(x_1, \cdots, x_n))$$

则称 f 不分明蕴涵 f'，记为 $f \xrightarrow{F} f'$；f 叫做 f' 的不分明蕴涵项（简称为 F—蕴涵项），f' 叫做 f 的不分明涵项（简称为 F—涵项）。

如果 $f \xrightarrow{F} f'$，且存在 $(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$，使

$$f(x_1, \cdots, x_n) < f'(x_1, \cdots, x_n)$$

则称 f 真不分明蕴涵 f'；这时 f 叫做 f' 的真 F—蕴函项，f' 叫做 f 的真 F—涵项。

下面的几个性质是明显的：

(1) $x \xrightarrow{F} x \vee y$，$x \wedge y \xrightarrow{F} x$，$x \wedge \bar{x} \xrightarrow{F} x \vee \bar{y}$

(2) 不分明蕴涵关系 $\xrightarrow{F}$ 满足条件：

a) 自反性：$f \xrightarrow{F} f$；

b) 反对称性：$f \xrightarrow{F} f'$ 且 $f' \xrightarrow{F} f \Rightarrow f = f'$；

c) 传递性：$f \xrightarrow{F} f'$ 且 $f' \xrightarrow{F} f'' \Rightarrow f \xrightarrow{F} f''$；

d) 吸收性：$f \xrightarrow{F} f' \Leftrightarrow f \vee f' = f' \Leftrightarrow f \wedge f' = f$

性质(2)说明不分明蕴涵关系 $\xrightarrow{F}$ 是 FE 中的偏序，并且格 $(FE, \xrightarrow{F})$ 与 $(FE, \vee, \wedge)$ 等价。

不分明蕴涵关系 $\xrightarrow{F}$ 在某种意义上可以看作二值逻辑中蕴涵关系的推广。在二值逻辑中，如果命题 $A \rightarrow B$ 为真，即其真值 $T(A \rightarrow B) = 1$，那么称 A 蕴涵 B。对含有命题变元 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的两个命题公式 $F(A_1, \cdots, A_n)$ 与 $F'(A_1, \cdots, A_n)$ 来说，F 蕴涵 F' 指的是对一切命题变元 $(A_1, \cdots, A_n)$，恒有 $T(F \rightarrow F') = 1$。设 f

与f'分别对应F与F'的布尔函数，于是

$\forall (A_1,\cdots,A_n), T(F\to F') = T(\neg F \vee F') = 1$

$\Leftrightarrow \forall (x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$，恒有

$\neg f \vee f' = (1-f)\vee f' = 1$

$\Leftrightarrow \forall (x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$，恒有

"$f(x_1,\cdots,x_n)=1\Rightarrow 1-f=0\Rightarrow f'(x_1,\cdots,x_n)=1$"

$\Leftrightarrow \forall (x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$，恒有

$f(x_1,\cdots,x_n)\leqslant f'(x_1,\cdots,x_n)$

因此在二值逻辑中，称命题公式F蕴涵F'（或称它们对应的布尔函数f蕴涵f'）当且仅当

$\forall (x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1]^n, f(x_1,\cdots,x_n)\leqslant f'(x_1,\cdots,x_n)$

此时若$F(A_1,\cdots,A_n)$为永真式，则$f(x_1,\cdots,x_n)\equiv 1$，因此$f(x_1,\cdots,x_n)\equiv 1$，即$F'(A_1,\cdots,A_n)$也是永真式。

不分明逻辑公式的化简是将一个析取范式化简为一个唯一确定由互素的并不可约元组成的析取式（即主析取范式），或将一个合取范式化简为一个唯一确定的交不可约元组成的合取式（即主合取式）。为此，我们先介绍字组的并可约元和并不可约元，子句的交可约元和交不可约元及不分明逻辑公式的互素概念。

(1)字组φ叫做并可约元（或叫做析取可约元），如果φ可表示为

$$\varphi = \bigvee_{j=1}^{m} \varphi_j \quad (m>1)$$

并且$\varphi_j \xrightarrow{F} \varphi$是真$F$—蕴涵$(j=1,2,\cdots,m)$。

字组φ叫做并不可约元，如果它不是并可约元。

(2)子句ψ叫做交可约元（或叫合取可约元），如果ψ可表示为

$$\psi = \bigwedge_{j=1}^{m} \psi_j \quad (m>1)$$

并且 $\psi \xrightarrow{F} \psi_j$ 是真F—蕴涵。

若 ψ 非交可约元，则称 ψ 为交不可约元。

(3)F—公式 f 和g 被称为互素的，当且仅当 f 不F—蕴涵 g（记为 $f \overset{F}{\not\to} g$）且 g 不F—蕴涵 f（记为 $g \overset{F}{\not\to} f$）。

设 f, g 为F—公式，下列条件是等价的：

(1)f 与g 互素；

(2)$f \xrightarrow{F} f \vee g$ 和$g \xrightarrow{F} f \vee g$ 都是真F—蕴涵；

(3)$f \wedge g \xrightarrow{F} f$ 和$f \wedge g \xrightarrow{F} g$ 都是真F—蕴涵。

我们仅就(1)⇔(2)加以说明。事实上，$f \xrightarrow{F} f \vee g$ 和$g \xrightarrow{F} f \vee g$ 都是真F—蕴涵⇔$f \neq f \vee g$ 且$g \neq f \vee g$⇔$g \overset{F}{\not\to} f$ 且$f \overset{F}{\not\to} g$⇔f 与g 互素。

对于字组 φ 是并不可约元及子句ψ 是交不约元分别有下述事实：

在 n 元F—公式所形成的软代数中，字组 φ 是并不约元当且仅当下面两种情况之一成立：

(1)φ 不含任何对称变量$(x_k, \bar{x}_k)$；

(2)φ 含每一变量且至少含有一对对称变量$(x_k, \bar{x}_k)$。

子句 ψ 是交不可约元，当且仅当下面两种情况之一成立：

(1)ψ 中不含任何对称变量；

(2)ψ 含每一变量且至少含有一对对称变量$(x_k, \bar{x}_k)$。

n 元F—公式的析取范式 $f = \bigvee_{j=1}^{m} \varphi_j$($m \geq 1$)叫做主析取范式，如果它所含的字组 φ_j 都是并不可约元且两两互素；n 元F—公式的合取范式 $f = \bigwedge_{j=1}^{m} \psi_j$;($m \geq 1$)叫做主合取范式，如果它所含子句 ψ_j 都是交不可约元且两两互素。

我们有如下结构：

(1)n 元F—公式 f 的主析取范式是唯一的。

(2)设 f 是n 元F—公式且 $f\neq 0.1$,是 f 的主析取范式是存在的。

(2)实际上给出了化简不分明化逻辑公式的一种方法,步骤如下:

步骤 1:利用软代数的运算规律将 n 元F—公式 f 写成析取范式;

步骤 2:对 f 中每一个并可约元φ,将所缺变量 x_k 写成$x_k \vee \bar{x}_k$ 与φ 合取得$\varphi \wedge (x_k \wedge \bar{x}_k)$,然后再写成析取范式:

步骤 3:删去蕴涵余字组的字组,最终得到的表达式就是 f 的主析取范式。

例 化简下面的三元 F—公式:

$$f=(z\wedge((\bar{y}\wedge(y\vee\bar{x}))\vee(\bar{z}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x})))$$
$$\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge((y\wedge x\wedge\bar{x})\vee z))$$

步骤 1:将 f 写成析取范式:

$$f=(z\wedge((\bar{y}\wedge y)\vee(\bar{y}\wedge\bar{x})\vee(\bar{z}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x}))$$
$$\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x})\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z)$$
$$=(z\wedge\bar{y}\wedge y)\vee(z\wedge\bar{y}\wedge\bar{x})\vee(z\wedge\bar{z}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x})$$
$$\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge y\wedge x\wedge\bar{x})\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z)$$

步骤 2:上面的析取范式中,第 1 项和第 5 项为并可约元,于是

$$(z\wedge\bar{y}\wedge y)=(z\wedge\bar{y}\wedge y)\wedge(x\vee\bar{x})$$
$$=(z\wedge\bar{y}\wedge y\wedge x)\vee(z\wedge\bar{y}\wedge y\wedge\bar{x})$$
$$=(x\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)$$
$$(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z)=(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z)\wedge(x\vee\bar{x})$$
$$=(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge x)\vee(\bar{z}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{x})$$
$$=(x\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})$$

由此得到 f 的新的析取范式:

$$f=(x\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z)$$
$$\vee(x\wedge\bar{x}\wedge y\wedge z\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})$$
$$\wedge(x\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})$$

步骤3:注意到 $\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z\xrightarrow{F}\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z,\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z}\xrightarrow{F}\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z$,删去 $\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z$ 和 $\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z}$,得到

$$f=(x\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{x}\wedge y\wedge z\wedge\bar{z})$$
$$\vee(x\wedge\bar{x}\wedge y\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z\wedge\bar{z})$$

这就是 f 的主析取范式。

(3)设 f 为 n 雹 F—公式且 $f\neq 0.1$,则 f 的主合取范式存在且唯一。

(4)若 F—公式 $\neg f$ 的主取范式为

$$\neg f=\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{l_i}x_{ij_i})$$

则 f 的主合取范式为

$$f=\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j_i=1}^{l_i}\bar{x}_{ij_i})$$

§4　不分明逻辑的演绎推理

先回顾二值逻辑中的两个常用的推理规则。

(1)肯定前件的假言推理(简记为 MP):如果"若 P 则 Q"为定理且前件 P 成立,那么后件 Q 成立。形式化表达式为

$$(MP):(P,P\to Q)\Rightarrow Q$$

真值表达式为

$$(T(P)=1,T(P\to Q)\equiv 1\Rightarrow T(Q)=1$$

(2)否定后件的假言推理(简记为 MT):如果"若 P 则 Q"为定理且后件 Q 不成立,那么前件 P 不成立。形式化表达式为

$$(MT):(\neg Q,P\to Q)\to\neg P$$

其真值表达式为：

$$(T(Q)=0, T(P\to Q)\equiv 1)\Rightarrow T(P)=0$$

这两个推理规则的正确性可用布尔函数来检验：置 $p=T(P)$，$q=T(Q)$，于是命题公式 $P\to Q$，对应布尔函数：

$$f(p,q)=\neg p\vee q=(1-p)\vee q$$

当 $P\to Q$ 是定理(即永真式)时，也即 $(1\text{-}p)\vee q\equiv 1$，显然有

(1) $T(P)=p=1\Rightarrow(1-1)\vee q\equiv 1\Rightarrow T(Q)=q=1$

(2) $T(Q)=q=0\Rightarrow(1-p)\vee 0\equiv 1\Rightarrow T(P)=p=0$

为了将二值逻辑的演绎推理推广到多值逻辑中，可将上述推理看作解下述的方程：

$$(1-p)\vee q=r$$

(1)(*MP*)：已知 $p=T(P)=1$，$r=T(P\to Q)=1$，求 $q=T(Q)$值。

(2)(*MT*)：已知 $q=T(Q)=0$，$r=T(P\to Q)=1$，求 $p=T(P)$值。

下面介绍无限值逻辑的演绎推理。

推理句“若 P 则 Q”在逻辑的演绎推理中起着重要作用。在二值逻辑，$P\to Q$，$\neg P\vee Q$，$\neg P\vee(P\wedge Q)$，三者是等价命题，如果用 $r(p,q)$表示与 $P\to Q$ 对应的布尔函数($r=T(P\to Q)$)，那么有

$$r(p,q)=\neg p\vee q=(1-p)\vee q$$

或 $$\vee(p,q)=\neg p\vee(p\wedge q)=(1-p)\vee P\wedge q)$$

当$(p,q)\in\{0.1\}^2$ 时，显然有

$$(1-p)\vee q=(1-p)\vee(p\vee q)$$

然而在无限值逻辑中上式不成立，经如取 $p=0.8$，$q=0.9$，便有

$$(1-p)\vee q=0.9,(1-p)\vee(p\wedge q)=0.8$$

因此$\neg P\vee Q$ 和$\neg P\vee(P\wedge Q)$在不分明逻辑中不是等价的命题公式，这是因为它们的 F—公式不相等。这样一来，分别用$\neg P\vee$

Q，$\neg P\vee(P\wedge Q)$表示推理句“若 P 则 Q”($P\rightarrow Q$)，便得到两种不同的演绎推理，它们都可以作为二值逻辑中的推理在不分明逻辑中的推广。这就是说，对于同一个二值逻辑中的推理，在不分明逻辑中可以有多种不同的演绎推理与之对应，它们是不等价的，在应用中可根据实际情况选择其中之一。比如

$$T(P\rightarrow Q)=(1-p)\overset{+}{*}q$$

或

$$T(P\rightarrow Q)=(1-p)\overset{+}{*}(p\dot{*}q)$$

它们都可作为不分明逻辑中推理句“若 P 则 Q”的 F—公式。

下面我们介绍的一种无限值逻辑是 *Lukasiewicz* 逻辑，形式如下：

$T(P)=p\in[0,1]$，$T(Q)=q\in[0,1]$

$T(\neg P)=\neg p=1-p$，$T(P\vee Q)=p\vee q$

$T(p\wedge Q)=p\wedge g$，$T(P\rightarrow Q)=\neg p\oplus q=(1-p+q)\wedge 1$

这里$\oplus$为有界和：$a\oplus b=(a+b)\wedge 1$。如果限制 $p,q\in\{0.1\}$，则 *Lukasiewicz* 逻辑与二值逻辑是一致的。下面的定理给出了 *Lukasiewicz* 逻辑演绎推理规则的结果。

(1)(MP)：如果已知 $T(P)=p$，$T(P\rightarrow Q)=r$，则

$$T(Q)=q=q(r,p)=\begin{cases}[p,1] & r=1\\ p+r-1, & r<1\text{ 且 }p+r-1\geqslant 0\\ \varnothing, & \text{其它}\end{cases}$$

(2)(MT)：如果已知 $T(Q)=q$，$T(P\rightarrow Q)=r$，则

$$T(P)=p=p(r,q)=\begin{cases}[0,q], & r=1\\ q-r+1, & r<1\text{ 有 }q-r+1\leqslant 1\\ \varnothing, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $q(r,p)=\varnothing$，$p(r,q)=\varnothing$ 表示无解。

事实上，注意到 $r=T(P\rightarrow Q)=\neg p\oplus q=(1-p+q)\wedge 1$，

考虑方程：$(1-p+q)\wedge 1=r$。

(1)已知 r,p，求 q。

情况 1：$r=1$，这时有 $(1-p+q)\wedge 1=1$，故 $1-p+q\geqslant 1$，即 $q\geqslant p$，从而 $q=[p,1]$。

情况 2：$r<1$，这时，我们有

$$(1-p+q)\wedge 1=r<1\Rightarrow r=1-p+q$$
$$\Rightarrow\begin{cases} q=r+p-1, & r+p-1\geqslant 0 \\ \varnothing, & r+p-1<0 \end{cases}$$

(2)已知 r,q 求 p

情况 1：$r=1$。这时有 $(1-p+q)\wedge 1=1$，因此 $1-p+q\geqslant 1$，即 $p\leqslant q$，从而 $p=[0,q]$。

情况 2：$r<1$，这时，我们有

$$(1-p+q)\wedge 1=r<1\Rightarrow r=1-p+q$$
$$\Rightarrow\begin{cases} p=q-r+1, & q-r+1\leqslant 1 \\ \varnothing, & q-r+1>1 \end{cases}$$

综合(1)、(2)两种情况可知结果为真。

最后，我们给出贯穿于本书的无限值逻辑，做为本章内容的结束。这种逻辑的详细介绍请参见文献[10]。本书所涉及的内容是基于连续值逻辑 $Ł\int$ 的语义方法的框架下。若 X 是一个论域，α 是该论域下的一个谓词，从现在开始我们使用记号 $[\alpha]$（而不再使用 $T(\alpha)$）表示 α 的直值。这里 $[\alpha]\in[0,1]$。本书中用到的真值赋值公式有

1. $[\neg\alpha]=1-[\alpha]$；
2. $[\alpha\wedge\beta]=\min([\alpha]、[\beta])$；
3. $[\alpha\rightarrow\beta]=[\alpha]\propto[\beta]=\min(1,1-[\alpha]+[\beta])$；
4. $[(\forall x)(\alpha(x))]=\inf\limits_{x\in X}[\alpha(x)]$，$[x\in A]=A(x)$；

相应的导出公式有

5. $\alpha\vee\beta:=\neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$；

即，$[\alpha \vee \beta]=\max([\alpha],[\beta])$

6. $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$;

即，$[\alpha \leftrightarrow \beta]=1-|[\alpha]-[\beta]|$

7. $(\exists x)(\alpha(x)) := \neg (\forall x) \neg (\alpha(x))$:

即，$[(\exists x(\alpha(x))]=\sup\limits_{x \in X}[\alpha(x)]$

8. $\alpha \dot{\wedge} \beta := \neg (\alpha \to \neg \beta)$:

即$[\alpha \dot{\wedge} \beta]=[\alpha] \otimes [\beta]=\max(0,[\alpha]+[\beta]-1)$

9. $\alpha \dot{\vee} \beta := \neg \alpha \to \beta$。

这里提到的$\propto$和$\otimes$是[0.1]中的两种运算。

本书中，集合间的关系相应为

10. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} : \forall x(x \in \tilde{A} \to x \in \tilde{B})$

11. $\tilde{A} \equiv \tilde{B} := (\tilde{A} \subseteq \tilde{B}) \wedge (\tilde{B} \subseteq \tilde{A})$

12. $\tilde{A} \dot{\equiv} \tilde{B} := (\tilde{A} \subseteq \tilde{B}) \dot{\wedge} (\tilde{B} \subseteq \tilde{A})$

使用真值律，我们可以得到下面的结果：

$\vDash (\tilde{A} \subseteq \tilde{B}) \to ((\tilde{B} \subseteq \tilde{C}) \to (\tilde{A} \subseteq \tilde{C}))$;

$\vDash (\tilde{A} \equiv \tilde{B}) \to ((\tilde{B} \equiv \tilde{C}) \to (\tilde{A} \equiv \tilde{C}))$;

$\vDash (\tilde{B} \subseteq \tilde{C}) \to ((\tilde{A} \subseteq \tilde{B}) \to (\tilde{A} \subseteq \tilde{C}))$;

$\vDash (\tilde{B} \equiv \tilde{C}) \to ((\tilde{A} \equiv \tilde{B}) \to (\tilde{A} \equiv \tilde{C}))$;

$\vDash (\tilde{A} \subseteq \tilde{B}) \to (f(\tilde{A}) \subseteq f(\tilde{B}))$;

$\vDash (\tilde{A} \equiv \tilde{B}) \to (f(\tilde{A}) \equiv f(\tilde{B}))$;

$\vDash (\tilde{C} \subseteq \tilde{D}) \to (f^{-1}(\tilde{C}) \subseteq f^{-1}(\tilde{D}))$;

$\vDash (\tilde{C} \equiv \tilde{D}) \to (f^{-1}(\tilde{C}) \equiv f^{-1}(\tilde{D}))$;

$\vDash (\tilde{A} \subseteq \tilde{B}) \to (X \sim \tilde{B} \subseteq X \sim \tilde{A})$;

$\vDash (\tilde{A} \equiv \tilde{B}) \to (X \sim \tilde{A} \equiv X \sim \tilde{B})$;

这里的 f 是映射。

书中出现的记号$\overset{W}{\vDash}\varphi$ 意味着对于任何赋值，总成立$[\varphi]>0$，而 $\varphi \overset{WS}{\vDash} \psi$ 意味着$[\varphi]>0$，可推导出$[\psi]=1$.

第一章　不分明化拓扑空间与连续函数

§1　不分明化拓扑空间

1.1　**定义**　设 X 是一个论域，若 $\mathscr{T}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 满足如下条件：

(1) $\models X\in\mathscr{T}$；

(2) $\forall A_1,A_2,\models(A_1\in\mathscr{T})\wedge(A_2\in\mathscr{T})\rightarrow A_1\cap A_2\in\mathscr{T}$；

(3) $\forall\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\},\models\forall\lambda(\lambda\in\Lambda\rightarrow A_\lambda\in\mathscr{T})\rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\mathscr{T}$。

则称 $\mathscr{T}$ 为 X 的不分明化拓扑，偶对 $(X,\mathscr{T})$ 称为不分明化拓扑空间，有时径称 X 为不分明化拓扑空间。此外，$\mathscr{T}$ 又称为不分明化开集簇。

1.1 定义中的条件还可以写成：

(1′) $\mathscr{T}(X)=1$；

(2′) $\forall A_1,A_2,\mathscr{T}(A_1\cap A_2)\geqslant\mathscr{T}(A_1)\wedge\mathscr{T}(A_2)$；

(3′) $\forall\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\},\mathscr{T}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\geqslant\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}(A_\lambda)$

1.2　**定义**　$\mathscr{F}$ 表示不分明化闭集簇，若

$$A\in\mathscr{F}:=A^C\in\mathscr{T}$$

即，

$$\mathscr{F}=\int_{\mathscr{P}(X)}\mathscr{T}(A^C)/A$$

1.3　**定理**

(1) $\varnothing\in\mathscr{F}$；

(2) $\forall A_1,A_2,\models(A_1\in\mathscr{F})\wedge(A_2\in\mathscr{F})\rightarrow A_1\cup A_2\in\mathscr{F}$；

(3) $\forall\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\},\models\forall\lambda(\lambda\in\Lambda\rightarrow A_\lambda\in\mathscr{F})\rightarrow\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\mathscr{F}$。

1.4　**定义**　$x\in X$。若 $N_x\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 可以表示为：

$$A\in N_x:=\exists B((B\in\mathscr{T})\wedge(x\in B\subseteq A))$$

则称 N_x 为 x 的邻域系。

即，
$$N_x = \int_{\mathscr{P}(X)} \sup_{x\in B\subseteq A} \mathscr{T}(B)/A$$

1.5 **引理** $\inf_{x\in A}\sup_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}(B)=\mathscr{T}(A)$。

证明 首先，我们有

$$\inf_{x\in A}\sup_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}(B)\geqslant\mathscr{T}(A)。$$

其次，设 $\mathscr{B}_x=\{B\mid x\in B\subseteq A\}$，则对任意 $f\in\prod_{x\in A}\mathscr{B}_x$，我们有 $\bigcup_{x\in A}f(x)=A$，因而 $\inf\limits_{x\in A}\mathscr{T}(f(x))\leqslant\mathscr{T}(\bigcup\limits_{x\in A}f(x))=\mathscr{T}(A)$，$\inf\limits_{x\in A}\sup\limits_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}(B)=\sup\limits_{f\in\prod_{x\in A}\mathscr{B}_x}\inf\limits_{x\in A}\mathscr{T}(f(x))\leqslant\mathscr{T}(A)$。 □

1.6 **定理** 对任意的 x,A，

$\models(A\in\mathscr{T})\leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow\exists B((B\in N_x)\wedge(B\subseteq A))$。

证明 $[\forall x(x\in A\rightarrow\exists B((B\in N_x)\wedge(B\subseteq A))]=\inf\limits_{x\in A}\sup\limits_{B\subseteq A}N_x(B)=\inf\limits_{x\in A}\sup\limits_{B\subseteq A}\sup\limits_{x\in C\subseteq B}\mathscr{T}(C)=\inf\limits_{x\in A}\sup\limits_{x\in C\subseteq A}\mathscr{T}(C)=\mathscr{T}(A)=[A\in\mathscr{T}]$ □

1.7 **定理** 设 $\mathscr{F}^N(\mathscr{P}(X))$是 $\mathscr{P}(X)$的所有正规不分明子集的集合，则映射 $N:X\rightarrow\mathscr{F}^N(\mathscr{P}(X))$，$x\rightarrow N_x$，具有如下性质：

(1)对任意的 x,A，$\models A\in N_x\rightarrow x\in A$；

(2)对任意的 x,A,B，$\models(A\in N_x)\wedge(B\in N_x)\rightarrow A\cap B\in N_x$；

(3)对任意的 x,A,B，$\models(A\subseteq B)\rightarrow(A\in N_x\rightarrow B\in N_x)$；

(4)对任意的 x,A，$\models(A\in N_x)\rightarrow\exists C((C\in N_x)\wedge(C\subseteq A)\wedge\forall y(y\in C\rightarrow C\in N_y))$。

反之，如果一个映射 N 满足(2)、(3)，则如下定义的 $\mathscr{T}$ 是一个不分明化拓扑：

$$A\in\mathscr{T}:=\forall x(x\in A\rightarrow A\in N_x)$$

特别，如果 N 还满足(1)、(4)，则对任意 $x\in X$，N_x 是关于 $\mathscr{T}$ 的 x 的邻域系。

证明 （一） (1)若$[A\in N_x]=\sup_{x\in C\subseteq A}\mathscr{T}(C)>0$，则存在$C_0$使得$x\in C_0\subseteq A$. 现因$[x\in A]=1$，因此$[A\in N_x]\leqslant[x\in A]$总是成立的。

(2)$[A\cap B\in N_x]=\sup\limits_{x\in C\subseteq A\cap B}\mathscr{T}(C)=\sup\limits_{x\in C_1\subseteq A,x\in C_2\subseteq B}\mathscr{T}(C_1\cap C_2)$
$\geqslant\sup\limits_{x\in C_1\subseteq A,x\in C_2\subseteq B}(\mathscr{T}(C_1)\wedge(C_2))=\sup\limits_{x\in C_1\subseteq A}\mathscr{T}(C_1)\wedge\sup\limits_{x\in C_2\subseteq B}\mathscr{T}(C_2)=$
$[(A\in N_x)\wedge(B\in N_x)]$

(3)若$A\nsubseteq B$，则显然成立。现设$A\subseteq B$，则由$x\in C\subseteq A$可推出$x\in C\subseteq B$，因此

$[A\in N_x]=\sup\limits_{x\in C\subseteq A}\mathscr{T}(C)\leqslant\sup\limits_{x\in C\subseteq B}\mathscr{T}(C)=[B\in N_x]$

(4)$[\exists C((C\in N_x)\wedge(C\subseteq A)\wedge\forall y(y\in C\rightarrow C\in N_y))]=$
$\sup\limits_{C\subseteq A}(N_x(C)\wedge\inf\limits_{y\in C}N_y(C))=\sup\limits_{C\subseteq A}(N_x(C)\wedge\mathscr{T}(C))=\sup\limits_{C\subseteq A}\mathscr{T}(C)\geqslant$
$\sup\limits_{x\in\subseteq A}\mathscr{T}(C)=[A\in N_x]$。

因为$\inf\limits_{y\in C}N_y(C)=\inf\limits_{y\in C}\sup\limits_{y\in D\subseteq C}\mathscr{T}(D)=\mathscr{T}(C)$

（二） 反之，$\mathscr{T}(A)=\inf_{x\in A}N_x(A)$。

(1)明显$\mathscr{T}(\varnothing)=1$. 对任意$x\in X$，因为$N_x$是正规的，所以总存在$A_0$使得$N_x(A_0)=1$，由条件(3)，有$N_x(X)=1$。因此$\mathscr{T}(X)$
$=\inf_{x\in X}N_x(X)=1$.

(2)$\mathscr{T}(A\cap B)=\inf\limits_{x\in A\cap B}N_x(A\cap B)\geqslant\inf\limits_{x\in A\cap B}(N_x(A)\wedge N_x(B))$
$=\inf\limits_{x\in A\cap B}N_x(A)\wedge\inf\limits_{x\in A\cap B}N_x(B)\geqslant\inf\limits_{x\in A}N_x(A)\wedge\inf\limits_{x\in B}N_x(B)=\mathscr{T}(A)\wedge$
$\mathscr{T}(B)$。

(3)$\mathscr{T}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\inf\limits_{x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}N_x(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda}\inf\limits_{x\in A_\lambda}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\geqslant\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda}$
$\inf\limits_{x\in A_\lambda}N_x(A_\lambda)=\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}(A_\lambda)$。

(4)由条件(4)，有$N_x(A)\leqslant\sup\limits_{C\subseteq A}(N_x(C)\wedge\inf\limits_{y\in C}N_y(C))$，再由条件(1)，对任意$x\notin C$，$N_x(C)=0$，因而

$N_x(A)\leqslant\sup\limits_{x\in C\subseteq A}(N_x(C)\wedge\inf\limits_{y\in C}N_y(C)\leqslant\sup\limits_{x\in C\subseteq A}\inf\limits_{y\in C}N_y(C)=$

$\sup\limits_{x\in B\leqslant A}\mathscr{T}(B)$。

另一方面，如果 $x\in C\subseteq A$，则 $\inf\limits_{y\in C}N_y(C)\leqslant N_x(C)\leqslant N_x(A)$，从而得到 $\sup\limits_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}(B)=\sup\limits_{x\in C\subseteq A}\inf\limits_{y\in C}N_y(C)\leqslant N_x(A)$。

故而由二方面得到 $N_x(A)=\sup\limits_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}(B)$□。

§2 不分明化拓扑的基

2.1 **定义** 设 $\mathscr{T}$ 是一个不分明化拓扑，$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}$，若 $\mathscr{B}$ 满足如下条件：

$$\vDash A\in N_x\rightarrow\exists B((B\in\mathscr{B})\wedge(x\in B\subseteq A))$$

则称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{T}$ 的一个基，记做 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{T}$。

2.2 **定理** $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基的充分必要条件是 $\mathscr{T}=\mathscr{B}^{(\cup)}$，这里 $\mathscr{B}^{(\cup)}$ 表示查德(*Zadeh*)的并扩展，即

$$\mathscr{B}^{(\cup)}=\int_{\{B_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\subseteq\mathscr{P}(X)}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}(B_\lambda)/\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$$

证明 假设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基，往证对任意 $A\in\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{T}(A)=\sup\limits_{\cup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=A}\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}(B_\lambda)$。

事实上，如果 $\cup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=A$，则 $\mathscr{T}(A)\geqslant\wedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}(B_\lambda)\geqslant\wedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}(B_\lambda)$。因此，$\mathscr{T}(A)\geqslant\sup\limits_{\cup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=A}\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}(B_\lambda)$。

反之，注意到 $N_x(A)\leqslant\sup\limits_{x\in B\subseteq A}\mathscr{B}(B)$ 及 1.4 引理，$\mathscr{T}(A)=\inf\limits_{x\in A}N_x(A)\leqslant\inf\limits_{x\in A}\sup\limits_{x\in B\subseteq A}\mathscr{B}(B)=\sup\limits_{f\in\Pi_{x\in A}\mathscr{B}_x}\bigwedge\limits_{x\in A}\mathscr{T}(f(x))$，其中 $\mathscr{B}_x=\{B|x\in B\leqslant A\}$。由于对任意的 $f\in\amalg_{x\in A}f(x)=A$，故而 $\mathscr{T}(A)\leqslant\sup\limits_{\cup_{x\in A}B_\lambda=A}\wedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}(B)$。

另一方面，若令 $\mathscr{T}=\mathscr{B}^{(\cup)}$，则 $\mathscr{B}$ 必是 $\mathscr{T}$ 的基，即对任意的 $A\in\mathscr{P}(X)$，$N_x(A)\leqslant\sup_{x\in B\subseteq A}\mathscr{B}(B)$。实际上，如果 $x\in B\subseteq A$，$\cup_{\lambda\in\Lambda}$

$B_\lambda = B$，则存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $x \in B_{\lambda_0}$ 及 $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}(B_\lambda) \leqslant \mathscr{B}(B_{\lambda_0}) \leqslant \sup_{x \in B \subseteq A} \mathscr{B}(\mathscr{B})$。因而

$$N_x(A) = \sup_{x \in B \subseteq A} \mathscr{T}(B) = \sup_{x \in B \subseteq A} \sup_{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = B} \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}(B_\lambda) \leqslant \sup_{x \in B \subseteq A} \mathscr{B}(B)$$ □

2.3 **定理** 设 $\mathscr{B} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，则 $\mathscr{B}$ 是某个不分明化拓扑 $\mathscr{T}$ 的基的充分必要条件是 $\mathscr{B}$ 具有性质：

(1) $\models X \in \mathscr{B}^{(\cup)}$；

(2) $\models (A \in \mathscr{B}) \wedge (B \in \mathscr{B}) \wedge (x \in A \cap B) \rightarrow \exists C (C \in \mathscr{B}) \wedge (x \in C \subseteq A \cap B))$

证明 若 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基，则 $\mathscr{T} = \mathscr{B}^{(\cup)}$，显然有 $X \in \mathscr{B}^{(\cup)}$，因此只需证明当 $x \in A \cap B$ 时，$\mathscr{B}(A) \wedge \mathscr{B}(B) \leqslant N_x(A \cap B) \leqslant \sup_{x \in C \subseteq A \cap B} \mathscr{B}(C)$，这是因为当 $x \in A \cap B$ 时，$\mathscr{B}(A) \wedge \mathscr{B}(B) \leqslant \mathscr{T}(A) \wedge \mathscr{T}(B) \leqslant \mathscr{T}(A \cap B) \leqslant N_x(A \cap B) \leqslant \sup_{x \in C \subseteq A \cap B} \mathscr{B}(C)$。

反之，若 $\mathscr{B}$ 满足(1)、(2)，则 $\mathscr{T} = \mathscr{B}^{(\cup)}$ 是一个不分明化拓扑。事实上，我们首先有 $\mathscr{T}(X) = 1$，其次对任意 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{P}(X)$，令

$$\mathscr{B}_\lambda = \{\{B_{\delta_\lambda} \mid \delta_\lambda \in A_\lambda\} \mid \bigcup_{\delta_\lambda \in A_\lambda} B_{\delta_\lambda} = A_\lambda\},$$

则因为对任意 $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda$，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{B_{\delta_\lambda} \in f(\lambda)} B_{\delta_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，故有

$$\mathscr{T}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \sup_{\bigcup_{\delta \in \Lambda} B_\delta = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \bigwedge_{\delta \in \Lambda} \mathscr{B}(B_\delta) \geqslant \sup_{f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda} \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \bigwedge_{B_{\delta_\lambda} \in f(\lambda)} \mathscr{B}(B_{\delta_\lambda})$$

$$= \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\{B_{\delta_\lambda} \mid \delta_\lambda \in \Lambda_\lambda\} \in \mathscr{B}_\lambda} \bigwedge_{\delta_\lambda \in \Lambda_\lambda} \mathscr{B}(B_{\delta_\lambda}) = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{T}(A_\lambda)$$

最后，证明 $\mathscr{T}(A \cap B) \geqslant \mathscr{T}(A) \wedge \mathscr{T}(B)$。若 $\mathscr{T}(A) > t$，$\mathscr{T}(B) > t$，则存在 $\{B_{\lambda_1}, \mid \lambda_1 \in \Lambda_1\}$ 和 $\{B_{\lambda_2} \mid \lambda_2 \in \Lambda_2\}$ 使得 $\bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1} B_{\lambda_1} = A$ 及 $\bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} B_{\lambda_2} = B$ 且对任意 $\lambda_1 \in \Lambda_1$，$\mathscr{B}(B_{\lambda_1}) > t$ 及任意 $\lambda_2 \in \Lambda_2$，$\mathscr{B}(B_{\lambda_2}) > t$。当 $x \in A \cap B$ 时，存在 $\lambda_{1x} \in \Lambda_1$，$\lambda_{2x} \in \Lambda_2$，使 $x \in B_{\lambda_{1x}}$

$\cap B_{\lambda_{2x}}$。故而

$$t<\mathscr{B}(B_{\lambda_{1x}})\wedge\mathscr{B}(B_{\lambda_{2x}})\leqslant\sup_{x\in C\subseteq B_{\lambda_{1x}}\cap B_{\lambda_{2x}}}\mathscr{B}(C)$$

而且更有 C_x 使 $x\in C_x\subseteq B_{\lambda_{1x}}\cap B_{\lambda_{2x}}\subseteq A\cap B,\mathscr{B}(C_x)>t$

因为 $\bigcup_{x\in A\cap B}C_x=A\cap B$，因此

$$t\leqslant\bigwedge_{x\in A\cap B}\mathscr{B}(C_x)\leqslant\sup_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=A\cap B}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}(B_\lambda)=\mathscr{T}(A\cap B)$$

现令 $k=\mathscr{T}(A)\wedge\mathscr{T}(B)$，故对任意自然数 $n,\mathscr{T}(A)>k-1/n,\mathscr{T}(B)>k-1/n$，于是 $\mathscr{T}(A\cap B)\geqslant k-1/n$。故有 $\mathscr{T}(A\cap B)\geqslant k=\mathscr{T}(A)\wedge\mathscr{T}(B)$。 □

2.4 **定义** 设 $\varphi\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，如果 $\varphi^{\cap}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基，则称 φ 是 $\mathscr{T}$ 的一个子基。这里 $\varphi^{\cap}$ 是查德(*Zadeh*)的有限交扩展，即

$$\varphi^{\cap}=\int_{\{B_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\Subset\mathscr{P}(X)}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\varphi(B_\lambda)/\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$$

其中"$\Subset$"表示一个有限子集。

2.5 **定理** 设 $\varphi\in(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，则 φ 是某个不分明化拓扑的子基侧充分必要条件是 $X\in\varphi^{(\cup)}$。

证明 显然只需证明 $\varphi^{\cap}$ 满足 2.3 定理中的第二条。因为

$$\begin{aligned}&\varphi^{\cap}(A)\wedge\varphi^{\cap}(B)\\&=(\sup_{\cap_{\lambda_1\in\Lambda_1}B_{\lambda_1}=A}\bigwedge_{\lambda_1\in\Lambda_1}\varphi(B_{\lambda_1})\wedge(\sup_{\cap_{\lambda_2\in\Lambda_2}B_{\lambda_2}=B}\bigwedge_{\lambda_2\in\Lambda_2}\varphi(B_{\lambda_2}))\\&=\sup_{\cap_{\lambda_1\in\Lambda_1}B_{\lambda_1}=A}\ \sup_{\cap_{\lambda_2\in\Lambda_2}B_{\lambda_2}=B}(\bigwedge_{\lambda_1\in\Lambda_1}\varphi(B_{\lambda_1})\wedge\bigwedge_{\lambda_2\in\Lambda_2}\varphi(B_{\lambda_2}))\\&\leqslant\sup_{\cap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=A\cap B}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\varphi(B_\lambda)=\varphi^{\cap}(A\cap B)\end{aligned}$$

因此，当 $x\in A\cap B$ 时，有

$$\varphi^{\cap}(A)\wedge\varphi^{\cap}(B)\leqslant\varphi^{\cap}(A\cap B)\leqslant\sup_{x\in C\subseteq A\cap B}\varphi^{\cap}(C)\qquad\square$$

2.6 **定义** 设 X 是一个不分明化拓扑空间，$x\in X$。

(1)若 $\mathscr{B}_x\in(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)))$，$\mathscr{B}_x\subseteq N_x$ 且对 $\forall A$，

$\vDash(A\in N_x)\rightarrow(\exists B)((B\in\mathscr{B}_x)\wedge(B\subseteq A))$

则称 $\mathscr{B}_x$ 为 x 的不分明化邻域系的一个基，并记做 $\mathscr{B}_x \vdash N_x$。

(2)若 $\mathscr{P}_x \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 使得 $\mathscr{P}^{(\cap)} \vdash N_x$，则称 $\mathscr{P}_x$ 为 x 的不分明化邻域系的一个子基。

2.7 **引理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，$x \in X$，若 φ 是 $\mathscr{T}$ 的子基，则

$$\varphi_x(u) = \begin{cases} \varphi(u), & x \in u, \\ 0, & x \notin u \end{cases}$$

是 x 的不分明化邻域系的子基。

结论是显然的，证明留给读者。 □

§3 导集和闭包

3.1 **定义** A 的不分明化导集A'定义为：

$$x \in A' := \forall B(B \in N_x \to (B \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset))$$

即，

$$A' = \int_X \inf_{B \cap (A - \{x\}) = \emptyset} (1 - N_x(B))/x.$$

3.2 **引理** $A' = \int_X 1 - N_x(A^C \cup \{x\})/x$

证明 $A'(x) = 1 - \sup_{B \cap (A - \{x\}) = \emptyset} N_x(B) = 1 - N_x(A^C \cup \{x\})$ □

3.3 **定理** 对任意 A, B

(1) $\models A' \subseteq A \leftrightarrow A \in \mathscr{F}$

(2) $\models B \doteq A \cup A' \to B \in \mathscr{F}$

证明

$$(1)[A' \subseteq A] = \inf_{x \in A^C} (1 - A'(x)) = \inf_{x \in A^C} N_x(A^C \cup \{x\}) =$$

$$\inf_{x \in A^C} N_x(A^C) = \inf_{x \in A^C} \sup_{x \in C \subseteq A^C} \mathscr{T}(C)$$

$$= \mathscr{T}(A^C) = [A \in \mathscr{F}]$$

(2)若 $A\nsubseteq B$，则$[B\doteq A\cup A']=0$. 现假设 $A\subseteq B$，则

$$[B\subseteq A\cup A']=\inf_{x\in B\sim A}A'(x)=1-\sup_{x\in B\sim A}N_x(X\sim A)$$

$$[A\cup A'\subseteq B]=\inf_{x\in X\sim B}(1-A'(x))=\inf_{x\in X\sim B}N_x(X\sim A)$$

$$[B\doteq A\cup A']=\max\{0,\ \inf_{x\in X\sim B}N_x(X\sim A)-\sup_{x\in B\sim A}N_x(X\sim A)\}$$

如果$[B\doteq A\cup A']>t$，则 $\inf_{x\in X\sim B}N_x(X\sim A)>t+\sup_{x\in B\sim A}N_x(X\sim A)$。因为 $N_x(X\sim A)=\sup_{x\in C\subseteq X\sim A}\mathscr{T}(C)$，所以对每一个 $x\in X\sim B$，$\sup_{x\in C\subseteq X\sim A}\mathscr{T}(C)>t+\sup_{x\in B\sim A}N_x(X\sim A)$

即存在 C_x 使得$x\in C_x\subseteq X\sim A$ 且$\mathscr{T}(C_x)>t+\sup_{x\in B\sim A}N_x(X\sim A)$。此外，还有 $C_x\subseteq X\sim B$。若不然，则有 $x'\in C_x$ 使得$x'\in B\sim A$，因而有

$\sup_{x\in B\sim A}N_x(X\sim A)\geqslant N_{x'}(X\sim A)\geqslant\mathscr{T}(C_x)>t+\sup_{x\in B\sim A}N_x(X\sim A)$，显然矛盾，故$\mathscr{F}(B)=\mathscr{T}(X-B)=\inf_{x\in X\sim B}N_x(X\sim B)\geqslant\inf_{x\in X\sim B}\mathscr{T}(C_x)>t+\sup_{x\in B\sim A}N_x(X\sim A)>t$。

由于 t 是任意的，因此$[B\doteq A\cup A']\leqslant[B\in\mathscr{F}]$ □

3.4 **定义** A 的不分明化闭包$\overline{A}$ 定义为：

$$x\in\overline{A}:=\forall B((B\supseteq A)\wedge(B\in\mathscr{F})\rightarrow x\in B)$$

即，

$$\overline{A}=\int_X\inf_{x\notin B\subseteq A}(1-\mathscr{F}(B))/x$$

3.5 **引理** $\overline{A}=\int_X 1-N_x(A^C)/x$

证明

$\overline{A}(x)=1-\sup_{x\notin B\supseteq A}\mathscr{T}(B^C)$

$\quad=1-\sup_{x\in B^C\subseteq A^C}\mathscr{T}(B^C)=1-N_x(A^C)$. □

3.6 **定理** 对任意 x，A，

(1)$\vDash\overline{A}\equiv A\cup A'$；

(2)$\vDash x\in\overline{A}\leftrightarrow\forall B(B\in N_x\rightarrow A\cap B\neq\varnothing)$；

(3)$\vDash A\in\mathscr{F}\leftrightarrow A\equiv\overline{A}$;

(4)$\vDash A\in\mathscr{F}\leftrightarrow \overline{A}\subseteq A$.

证明

(1)若 $x\in A$,则 $N_x(A^C)=0$, $\overline{A}(x)=1-N_x(A^C)=1$,又显然$(A\cup A')(x)=1$。若 $x\notin A$,则$(A\cup A')(x)=A'(x)=1-N_x(A^C\cup\{x\})=1-N_x(A^C)=\overline{A}(x)$.

(2)$[\forall B(B\in N_x\rightarrow A\cap B\neq\varnothing)]=\inf\limits_{A\cap B=\varnothing}(1-N_x(B))=1-\sup\limits_{B\subseteq A^C}N_x(B)=1-N_x(A^C)=\overline{A}(x)$.

(3)$\vDash A\in\mathscr{F}\leftrightarrow A'\subseteq A\leftrightarrow A\equiv A\cup A'\equiv\overline{A}$.

(4)$\vDash A\in\mathscr{F}\leftrightarrow A'\subseteq A\leftrightarrow \overline{A}\equiv A\cup A'\subseteq A$. □

3.7 **定义** 设 $Cl:\mathscr{P}(X)\rightarrow\mathscr{P}(X)$,如果它的扩张 $Cl:\mathscr{F}(X)\rightarrow\mathscr{F}(X)$,

$$Cl(\widetilde{A})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_\alpha},\ \widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$$

满足如下的 *Kuratowski* 闭包公理:

(1)$Cl(\varnothing)=\varnothing$;

(2)$\widetilde{A}\subseteq Cl(\widetilde{A})$, $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$;

(3)$Cl(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})=Cl(\widetilde{A})\cup Cl(\widetilde{B})$, $\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$;

(4)$Cl(Cl(\widetilde{A}))\subseteq Cl(\widetilde{A})$, $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$.

则 $Cl:\mathscr{P}(X)\rightarrow\mathscr{F}(X)$称为一个不分明化闭包算子。其中 $\widetilde{A}_\alpha=\{x\mid\widetilde{A}(x)\geqslant\alpha\}$是 A 的α—截集, $\alpha\widetilde{A}=\int_X\alpha\wedge\widetilde{A}(x)/x$.

3.8 **引理** $\overline{\widetilde{A}}=\overline{\bigcup_{x\in X}\widetilde{A}(x)\widetilde{A}_{\widetilde{A}(x)}}$.

证明 $\overline{\widetilde{A}}\supseteq\overline{\bigcup_{x\in X}\widetilde{A}(x)\widetilde{A}_{\widetilde{A}(x)}}$是明显的。反之,对任意的 $\alpha\in[0,1]$,有 $x_\alpha\in X$ 使得$\widetilde{A}_\alpha=\widetilde{A}_{\widetilde{A}(x_\alpha)}$。这是因为$\{\widetilde{A}_\alpha\mid\alpha\in[0,1]\}=\{\widetilde{A}_{\widetilde{A}(x)}\mid x\in X\}$。现有 $\alpha\leqslant\widetilde{A}(x_\alpha)$,若不然, $\alpha>\widetilde{A}(x_\alpha)$,则 $x_\alpha\in\widetilde{A}_{\widetilde{A}(x_\alpha)}$,但 $x_\alpha\notin\widetilde{A}_\alpha$。因此,

$$\overline{\widetilde{A}}=\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}}\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\widetilde{A}(x_\alpha)\overline{\widetilde{A}_{\widetilde{A}(x_\alpha)}}\subseteq\bigcup_{x\in X}\widetilde{A}(x)\overline{\widetilde{A}_{\widetilde{A}(x)}}.\quad\square$$

3.9 **引理** $\overline{\widetilde{A}}=\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_{[\alpha]}}$，其中 $\widetilde{A}_{[\alpha]}=\{x|\widetilde{A}(x)>\alpha\}$ 是 A 的 α—强截集。

证明 显然$\overline{\widetilde{A}}\supseteq\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_{[\alpha]}}$。反之，对任意 $\alpha\in[0.1]$，令 $\alpha_n\in[0.2](n=1,2,\cdots)$，$\alpha_n\uparrow\alpha$。则有 $\widetilde{A}_{[\alpha_n]}\supseteq\widetilde{A}_\alpha$，$\overline{\widetilde{A}_{[\alpha_n]}}\supseteq\overline{\widetilde{A}_\alpha}$，且 $\bigcup_{n-1}^{\infty}\alpha_n\overline{\widetilde{A}_{[\alpha_n]}}\supseteq\alpha\overline{\widetilde{A}_\alpha}$。因而

$$\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_{[\alpha]}}\supseteq\bigcup_{\alpha\in[0.1]}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\alpha_n\overline{\widetilde{A}_{[\alpha_n]}}\supseteq\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_\alpha}=\overline{\widetilde{A}}.\quad\square$$

3.10 **引理** $\alpha(\overline{\widetilde{A}})_{[\alpha]}\subseteq\alpha\overline{\widetilde{A}_\alpha}$，$\alpha\in[0.1]$.

证明 若 $x\in(\overline{\widetilde{A}})_\alpha$，则$\overline{\widetilde{A}}(x)=\bigvee_{\lambda\in[0.1]}(\lambda\wedge\overline{\widetilde{A}\lambda}(x))>\alpha$，且有 $\lambda_0\in[0.1]$使得 $\lambda_0\wedge\overline{\widetilde{A}_{\lambda_0}}>\alpha$，即，$\lambda_0>\alpha$，$\overline{\widetilde{A}_{x_0}}(x)>\alpha$。因而$\overline{\widetilde{A}_\alpha}(x)\geqslant\overline{\widetilde{A}_{\lambda_0}}(x)>\alpha$，$\alpha\overline{\widetilde{A}_\alpha}(x)=\alpha=\alpha(\overline{\widetilde{A}})\alpha(x)$. $\square$

3.11 **引理** $\alpha\overline{\widetilde{A}}=\overline{\alpha\widetilde{A}}$，$\alpha\in[0.1]$.

证明 若 $\lambda>\alpha$，则$\overline{\widetilde{A}_\lambda}\subseteq\overline{\widetilde{A}_\alpha}$. 因此$\bigcup_{\lambda\in[\alpha.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_\lambda}\subseteq\alpha\overline{\widetilde{A}_\alpha}$，且因为对任意 $\lambda\in[0.\alpha](\alpha\widetilde{A})_\lambda=\widetilde{A}_\lambda$，对任意 $\lambda\in(\alpha.1]$，$(\alpha\widetilde{A})_\lambda=\varnothing$，故而 $\alpha\overline{\widetilde{A}}=\alpha\bigcup_{\lambda\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in[0.1]}(\alpha\wedge\lambda)\overline{\widetilde{A}_\lambda}=(\bigcup_{\lambda\in[0.\alpha]}\lambda\overline{\widetilde{A}_\lambda})\cup(\bigcup_{\lambda\in[\alpha.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in[0.\alpha]}\lambda\overline{\widetilde{A}_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in[0.1]}\lambda\overline{(\alpha\widetilde{A})_\lambda}=\alpha\overline{\widetilde{A}_\lambda}$. $\square$

3.12 **引理** 若 $\widetilde{A}^{(\alpha)}\in\mathscr{F}(X)(\alpha\in[0.1])$，$\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，$\widetilde{A}^{(\alpha)}\supseteq\widetilde{B}_\alpha(\alpha\in[0.1])$，$\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\widetilde{A}^{(\alpha)}=\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\widetilde{B}_\alpha$，则$[\widetilde{A}^{(\alpha)}\equiv\widetilde{B}_\alpha]\geqslant 1-\alpha$.

证明 注意到$[\widetilde{A}^{(\alpha)}\equiv\widetilde{B}_\alpha]=\inf_{x\in X}(1-|\widetilde{A}^{(\alpha)}(x)-\widetilde{B}_\alpha(x)|)=\inf_{x\notin\widetilde{B}_\alpha}(1-\widetilde{A}^{(\alpha)}(x))$。若$[\widetilde{A}^{(\alpha)}\equiv\widetilde{B}_\alpha]<1-\alpha$，故而有 $x_0\notin\widetilde{B}_\alpha$，使得 $\widetilde{A}^{(\alpha)}(x_0)>\alpha$.

现如果$\bigvee_{\beta\in[0.\alpha)}\widetilde{B}_\beta(x_0)\geqslant\alpha$，则对任何$\beta\in[0.\alpha)$，$x_0\in\widetilde{B}_\beta$，进而有$x_0\in\bigcap_{\beta\in[0.\alpha)}\widetilde{B}_\beta=\widetilde{B}_\alpha$，这与$x_0\notin\widetilde{B}_\alpha$矛盾。故有

$$(\bigcup_{\beta\in[0.1]}\beta\widetilde{B}_\beta)(x_0)=\bigvee_{\beta\in[0.\alpha]}(\beta\wedge\widetilde{B}_\beta(x_0))<\alpha$$

但却有

$$(\bigcup_{\beta\in[0.1]}\beta\widetilde{A}^{(\beta)})(x_0)\geqslant\alpha$$

这与题设矛盾。故$[\widetilde{A}^{(\alpha)}\equiv\widetilde{B}_\alpha]\geqslant1-\alpha$. □

3.13 **定理** 闭包$^-$：$\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$，$A\to\overline{A}$，是一个不分明化闭包算子。反之，若$Cl:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$是一个不分明化闭包算子，$\mathscr{T}\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(X))$定义为：$A\in\mathscr{T}:=Cl(A^C)\equiv A^C$，则$\mathscr{T}$是一个不分明化拓扑且对任意$A$，$Cl(A)=\overline{A}$。其中$\overline{A}$是$A$关于$\mathscr{T}$的闭包。

证明 我们首先验证3.7定义中的四个条件，并证明$^-$是一个不分明化闭包算子。

(1)是显然的。

(2)若$\widetilde{A}\in\mathscr{P}(X)$，则3.6定理(1)即可推出。在一般情况下，$\overline{\widetilde{A}}=\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_\alpha}\supseteq\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\widetilde{A}_\alpha=\widetilde{A}$.

(3)首先注意到由$\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}$可推出$\overline{\widetilde{A}}\subseteq\overline{\widetilde{B}}$。事实上，当$\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{P}(X)$时，则对$\forall x$，由1.6定理(3)，

$[\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}]=[\widetilde{B}^C\subseteq\widetilde{A}^C]\leqslant\min(1,1-N_x(\widetilde{B}^C)+N_x(\widetilde{A}^C))=\min(1,1-(1-N_x(\widetilde{A}^C))+(1-N_x(\widetilde{B}^C)))=\min(1,1-\overline{\widetilde{A}}(x)+\overline{\widetilde{B}}(x))=[\overline{\widetilde{A}}\subseteq\overline{\widetilde{B}}]$.

在一般情况下，由于当$\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}$时，对$\forall\alpha\in[0.1]$有$\widetilde{A}_\alpha\subseteq\widetilde{B}_\alpha$，因而$\overline{\widetilde{A}}=\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_\alpha}\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{B}_\alpha}=\overline{\widetilde{B}}$. 总上得到，$\overline{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}\supseteq\overline{\widetilde{A}}\cup\overline{\widetilde{B}}$。反之，当$\widetilde{A},\widetilde{B}\in\mathscr{P}(X)$，则对$\forall x\in X$，

$$\overline{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)=1-N_x(\widetilde{A}^C\cap\widetilde{B}^C)=1-\sup_{x\in C\subseteq\widetilde{A}^C\cap\widetilde{B}^C}\mathscr{T}(\widetilde{C})$$

$$=1-\sup_{\substack{x\in\widetilde{C}_1\subseteq\widetilde{A}^C\\x\in\widetilde{C}_2\subseteq\widetilde{B}^C}}\mathscr{T}(\widetilde{C}_1\cap\widetilde{C}_2)$$

$$\leqslant 1-\sup_{\substack{x\in\tilde C_1\subseteq\tilde A^C\\ x\in\tilde C_2\subseteq\tilde B^C}}(\mathcal{N}((\tilde C_1)\wedge\mathcal{N}(\tilde C_2))$$

$$=(1-\sup_{x\in\tilde C_1\subseteq\tilde A^C}\mathcal{N}(\tilde C_1))\vee(1-\sup_{x\in\tilde C_2\subseteq\tilde B^C}\mathcal{N}(\tilde C_2))$$

$$=(1-N_x(\tilde A^C))\vee(1-N_x(\tilde B^C))=(\overline{\tilde A}\cup\overline{\tilde B})(x)$$

在一般情况下

$$\overline{\tilde A\cup\tilde B}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\,\overline{(\tilde A\cup\tilde B)_\alpha}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{\tilde A_\alpha\cup\tilde B_\alpha}\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\overline{\tilde A_\alpha}\cup\overline{\tilde B_\alpha})$$

$$=(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{\tilde A_\alpha})\cup(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{\tilde B_\alpha})=\overline{\tilde A}\cup\overline{\tilde B}.$$

(4)当 $\tilde A\in\mathcal{F}(X)$时,由 3.8 引理,

$$\overline{\overline{\tilde A}}=\bigcup_{x\in X}\overline{\tilde A}(x)\overline{(\overline{\tilde A})_{\overline{\tilde A}(x)}},$$

故对 $\forall\, y\in X,\overline{\overline{\tilde A}}=\bigvee_{x\in X}(\overline{\tilde A}(x)\wedge\overline{(\overline{\tilde A})_{\overline{\tilde A}(x)}}(y))$.

然而对 $\forall\, x\in X$,令 $K_x=(\overline{\tilde A})_{\overline{\tilde A}(x)}$;则有

$$\overline{\tilde A}(x)\wedge\overline{K_x}(y)\leqslant\inf_{z\in K_x}\overline{\tilde A}(z)\wedge\overline{K_x}(y)$$

$$=\inf_{z\in K_x}(1-N_z(\tilde A^C))\wedge(1-N_y(K_x^C))$$

$$=1-\sup_{z\in K_x}N_z(\tilde A^C)\vee N_y(K_x^C)$$

因对 $\forall\, z\in K_x$, $\{D\mid\{z,y\}\subseteq D\subseteq\tilde A^C\}\subseteq\{B\mid y\in B\subseteq\tilde A^C\}$ 及

$$\{D\mid y\in D\subseteq\tilde A^C,\ \forall\, z\in K_x,\ z\notin D\}\subseteq\{C\mid y\in C\subseteq K_x^C\}$$

故有

$$\sup_{z\in K_x}N_z(\tilde A^C)\vee N_y(K_x^C)=\sup_{z\in K_x}\sup_{z\in B\subseteq A^C}\mathcal{N}(B)\vee\sup_{y\in C\subseteq K_x^C}\mathcal{N}(C)$$

$$\geqslant\sup_{z\in K_x}\sup_{\{y,z\}\subseteq D\subseteq\tilde A^C}\mathcal{N}(D)\vee\sup_{y\in D\subseteq\tilde A^C,\ \forall z\in K_x,\ z\notin D}\mathcal{N}(D)$$

$$=\sup_{y\in D\subseteq\tilde A^C}\mathcal{N}(D)=N_y(\tilde A^C).$$

且对 $\forall\, x\in X,\overline{\tilde A}(x)\wedge\overline{K_x}(y)\leqslant\overline{\tilde A}(y)$,因此

$$\overline{\overline{\widetilde{A}}}(y)=\bigvee_{x\in X}(\overline{\widetilde{A}}(x)\wedge\overline{K}_x(y))\leqslant\bigvee_{x\in X}(1-N_y(\widetilde{A}^C))=\overline{\widetilde{A}}(y)$$

当 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$时，由 3.9、3.10、3.11 引理，

$$\overline{\overline{\widetilde{A}}}=\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\ \overline{(\overline{\widetilde{A}})_{[\alpha]}}=\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\overline{\alpha(\overline{\widetilde{A}})_{[\alpha]}}\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\overline{\alpha(\overline{\widetilde{A}})_\alpha}$$

$$=\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\overline{\widetilde{A}}}_\alpha\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}}_\alpha=\overline{\widetilde{A}}.$$

现证明由不分明化闭包算子 Cl 所诱导的 $\mathscr{T}$ 是一个不分明化拓扑。这只需证明 $\mathscr{F}$ 满足 1.3 定理的条件，其中 $\mathscr{F}$ 定义为：$A\in\mathscr{F}:=Cl(A)\equiv A$.

(a)由 3.7 定义中的(1)立知 $\varnothing\in\mathscr{F}$。

$$\begin{aligned}(b)\mathscr{F}(A\cup B)&=[Cl(A\cup B)\equiv A\cup B]\\&=[Cl(A)\cup Cl(B)\equiv A\cup B]\\&\geqslant[Cl(A)\equiv A]\wedge[Cl(B)\equiv B]\\&=\mathscr{F}(A)\wedge\mathscr{F}(B).\end{aligned}$$

(c)由 3.7 定义中的(3)，$Cl(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}Cl(A_\lambda)$，故

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)&=[Cl(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\equiv\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda]\\&=[(Cl(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda])\wedge(Cl(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\supseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)]\\&=[Cl(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda]\\&\geqslant[(Cl(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}Cl(A_\lambda))\wedge(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}Cl(A_\lambda)\equiv\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)]\\&=[\bigcap_{\lambda\in\Lambda}Cl(A_\lambda)\equiv\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda]\\&\geqslant\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}[Cl(A_\lambda)\equiv A_\lambda]=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}(A_\lambda).\end{aligned}$$

最后，证明对 $\forall A$，$Cl(A)=\overline{A}$，事实上，$\forall x\in X$，

$$\overline{A}(x)=1-N_x(A^C)=1-\sup_{x\in B\subseteq A^C}\mathscr{T}(B)=1-\sup_{x\in B\subseteq A^C}[Cl(B^C)\equiv B^C]$$

$$=1-\sup_{x\in B\subseteq A^C}\inf_{y\in B}(1-Cl(B^C)(y))$$
$$=1-\sup_{x\in B\subseteq A^C}(1-\sup_{y\in B}Cl(B^C)(y))$$
$$=\inf_{x\in B\subseteq A^C}\sup_{y\in B}Cl(B^C)(y)$$
$$=\sup_{f\in\prod_{B\in\mathscr{B}}B}\inf_{B\in\mathscr{B}}Cl(B^C)(f(B))$$
$$\geqslant\inf_{B\in\mathscr{B}}Cl(B^C)(f_0(B))=\inf_{B\in\mathscr{B}}Cl(B^C)(x).$$

其中 $\mathscr{B}=\{B\mid x\in B\subseteq A^C\}$, $f_0:\mathscr{B}\to\bigcup\mathscr{B}$, $B\to x$, $B\in\mathscr{B}$. 另外，如果 $B\in\mathscr{B}$, 则 $B^C\supseteq A$, 而且由 3.7 定义(3)得 $Cl(B^C)\supseteq Cl(A)$, 故而 $\bar{A}(x)\geqslant Cl(A)(x)$.

反之，因 $Cl(A)\supseteq A$, $Cl(Cl(A))=Cl(A)$, 故而只须证明若 $\tilde{B}\in\mathscr{F}(X)$, $\tilde{B}\supseteq A$, $Cl(\tilde{B})=\tilde{B}$ 有 $\tilde{B}\supseteq\bar{A}$。因此, $\forall x\in X$, 往证 $\bar{A}(x)\leqslant\tilde{B}(x)$。由于 $\bar{A}(x)=1-\sup_{x\notin D\supseteq A}\mathscr{F}(D)=1-\sup_{x\notin D\supseteq A}[Cl(D)\equiv D]$, 故又只需证明 $\sup_{x\notin D\supseteq A}[Cl(D)\equiv D]\geqslant 1-\tilde{B}(x)$.

对任意正整数 n, 令 $\lambda=1-\tilde{B}(x)-1/n\geqslant 0$, 则 $x\notin\tilde{B}_{1-\lambda}$ 且 $\tilde{B}_{1-\lambda}\supseteq A$, $\sup_{x\notin D\supseteq A}[Cl(D)\equiv D]\geqslant[Cl(\tilde{B}_{1-\lambda})\equiv\tilde{B}_{1-\lambda}]$. 因为 $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha Cl(\tilde{B}_\alpha)=Cl(\tilde{B})=\tilde{B}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\tilde{B}_\alpha$ 及 $Cl(\tilde{B}_\alpha)\supseteq\tilde{B}_\alpha$, 由 3.12 引理，有

$[Cl(\tilde{B}_{1-\lambda})\equiv\tilde{B}_{1-\lambda}]\geqslant\lambda$, 且 $\sup_{x\notin D,D\supseteq A}[Cl(D)\equiv D]\geqslant\lambda=1-\tilde{B}(x)-1/n$, 令 $n\to\infty$; 则成立 $\sup_{x\notin D,D\supseteq A}[Cl(D)\equiv D]\geqslant 1-\tilde{B}(x)$.
□

§4 内部和边界

4.1 **定义** $A\subseteq X$, 则由 $x\in A^\circ:=A\in N_x$ 所给出的 A 的内点的不分明集称为 A 的内部。即,

$$A^{\circ}=\int_X N_x(A)/x$$

4.2 **定理** 对任意 x,A,B,

(1) $\vDash B\dot{\equiv}A^{\circ}\to B\in\mathscr{T}$;

(2) $\vDash (B\in\mathscr{T})\wedge(B\subseteq A)\to B\subseteq A^{\circ}$;

(3) $\vDash A\equiv A^{\circ}\leftrightarrow A\in\mathscr{T}$;

(4) $\vDash x\in A^{\circ}\leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\notin(X\sim A)')$;

(5) $\vDash A^{\circ}\equiv X\sim\overline{X\sim A}$.

证明 我们先证明(2),若 $B\nsubseteq A$,则 $[(B\in\mathscr{T})\wedge(B\subseteq A)]=0$,若 $B\subseteq A$,则 $[B\subseteq A^{\circ}]=\inf\limits_{x\in B}A^{\circ}(x)=\inf\limits_{x\in B}N_x(A)\geqslant\inf\limits_{x\in B}N_x(B)=\mathscr{T}(B)=[(B\in\mathscr{T})\wedge(B\subseteq A)]$.

(3) $[A\equiv A^{\circ}]=\min(\inf\limits_{x\in A}A^{\circ}(x),\inf\limits_{x\in X\sim A}(1-A^{\circ}(x)))=\inf\limits_{x\in A}A^{\circ}(x)=\inf\limits_{x\in A}N_x(A)=\mathscr{T}(A)=[A\in\mathscr{T}]$.

(4)如果 $x\notin A$,则 $[x\in A^{\circ}]=0=[(x\in A)\wedge(x\notin(x\sim A)']$. 如果 $x\in A$,则 $[x\in(X\sim A)']=1-N_x(A\cup\{x\})=1-N_x(A)=1-[x\in A^{\circ}]$,于是,$[(x\in A)\wedge(x\notin(X\sim A)')]=[x\in A^{\circ}]$.

$$\begin{aligned}(5)(X\sim\overline{X\sim A})(x)&=1-\overline{X\sim A}(x)\\&=1-(1-N_x((X\sim A)^C))\\&=N_x(A)=A^{\circ}(x)\end{aligned}$$

最后证明(1),由(5)及3.3 定理(2),

$[B\dot{\equiv}A^{\circ}]=[X\sim B\dot{\equiv}\overline{X\sim A}]\leqslant[X\sim B\in\mathscr{F}]=[B\in\mathscr{T}]$. □

4.3 **定义** $A\subseteq X$,则 A 的边界定义为

$x\in b(A):=(x\notin A^{\circ})\wedge(x\notin(X\sim A)^{\circ}]$,即,

$$b(A)=\int_X\min(1-A^{\circ}(x),1-(X\sim A)^{\circ}(x))/x.$$

4.4 **引理** 对任意 x,A,

$\vDash x\in b(A)\leftrightarrow(\forall B)(B\in N_x\to(B\cap A\neq\emptyset)\wedge(B\cap(X\sim A)$

$\neq\varnothing))$

证明

$$[(\forall B)(B\in N_x\to(B\cap A\neq\varnothing)\wedge(B\cap(X\sim A)\neq\varnothing))]$$
$$=\min\ \inf_{B\subseteq A}(1-N_x(B)),\ \inf_{B\subseteq X\sim A}(1-N_x(B)))$$
$$=\min(1-N_x(A),1-N_x(X\sim A))$$
$$=\min(1-A^{\circ}(x),1-(X\sim A)^{\circ}(x))$$
$$=[x\in b(A)].\ \square$$

4.5 **定理** 对任意 A,

(1) $\models b(A)\equiv\overline{A}\cap\overline{X\sim A}$, 于是 $\models b(A)=b(X\sim A)$;

(2) $\models X\sim b(A)\equiv A^{\circ}\cup(X\sim A)^{\circ}$;

(3) $\models\overline{A}\equiv A\cup b(A)$, 于是 $\models b(A)\subseteq A\leftrightarrow A\in\mathscr{F}$;

(4) $\models A^{\circ}\equiv A\cup(X\sim b(A))$, 于是 $\models(b(A)\cap A\equiv\varnothing)\leftrightarrow A\in\mathscr{T}$.

证明 (1)由 4.2 定理(5),得到

$$(\overline{A}\cap\overline{X\sim A})(x)=\min(\overline{A}(x),\overline{X\sim A}(x))$$
$$=\min(1-(X\sim A)^{\circ}(x),1-A^{\circ}(x))$$
$$=b(A)(x).$$

(2)由(1)和 4.2 定理(5),得到

$X\sim b(A)=X\sim\overline{A}\cap\overline{X\sim A}=(X\sim\tilde{A})\cup(X\sim\overline{X\sim A})=(X\sim A)^{\circ}\cup A^{\circ}$.

(3)若 $x\in A$,则 $\overline{A}(x)=(A\cup b(A))(x)=1$.

若 $x\notin A$,则$(A\cup b(A))(x)=b(A)(x)$

$$=\min(1-A^{\circ}(x),1-(X\sim A)^{\circ}(x))$$
$$=1-(X\sim A)^{\circ}(x)=\overline{A}(x).$$

由 3.3 定理(1), $A\in\mathscr{F}\leftrightarrow A'\subseteq A\leftrightarrow(A\subseteq A)\wedge(A'\subseteq A)\leftrightarrow(A\cup A'\subseteq A)\leftrightarrow\overline{A}\subseteq A\leftrightarrow A\cup b(A)\subseteq A\leftrightarrow(A\subseteq A)\wedge(b(A)\subseteq A)\leftrightarrow b(A)\subseteq A$.

(4) $A^\circ = X \sim \overline{X \sim A} = X \sim ((X \sim A) \cup b(X \sim A)) = A \cap (X \sim b(A))$.

由 4.2 定理(3), $\models b(A) \cap A \equiv \varnothing \leftrightarrow (X \sim b(A)) \cup (X \sim A) \equiv X \leftrightarrow A \subseteq X \sim b(A) \leftrightarrow A \cap (X \sim b(A)) \equiv A \leftrightarrow A^\circ \equiv A \leftrightarrow A \in \mathscr{T}$.
□

§ 5 Moore－Smith 收敛

设$(X、\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间, X 中的所有网组成的类表示为:

$N(x) = \{S \mid S: D \rightarrow X$, 其中$(D, \geqslant)$是一个定向集$\}$.

现给出

5.1 **定义** 二元不分明谓词$\triangleright$, $\propto \in \mathscr{F}(N(X) \times X)$定义为:

$S \triangleright x := \forall A(A \in N_x \rightarrow S \subsetsim A)$,

$S \propto x := \forall A(A \in N_x \rightarrow S \sqsubsetsim A)$,

其中 $S \triangleright x$, $S \propto x$ 分别表示"S 收敛到 x"和"x 是 S 的一个聚点", $\subsetsim$、$\sqsubsetsim$ 分别表示二元分明谓词"几乎在"和"常常在"。

不分明集

$$\lim S = \int_X [S \triangleright x]/x, \operatorname{adh} S = \int_X [S \propto x]/x$$

分别称作 S 的极限集和接触集。

5.2 **定理** 对任意 x, A, S,

(1) $\models x \in A' \leftrightarrow \exists S((S \subseteq A - \{x\}) \wedge (S \triangleright x))$;

(2) $\models x \in \overline{A} \leftrightarrow \exists S((S \subseteq A) \wedge (S \triangleright x))$;

(3) $\models A \in \mathscr{F} \leftrightarrow \forall S(S \subseteq A \rightarrow \lim S \subseteq A)$;

(4) $\models S \propto x \leftrightarrow \exists T((T < S) \wedge (T \triangleright x))$,

其中 $S \subseteq A$, $T < S$ 分别表示"S 总在 A 中"和"T 是 S 的一个子网"。

证明 (1)因为$[S \triangleright x] = \inf_{S \nsubseteq A}(1 - N_x(A))$，所以$[\exists S((S \subseteq A - \{x\}) \wedge (S \triangleright x))] = \sup_{S \in N(X), S \subseteq A - \{x\}} \inf_{S \nsubseteq B}(1 - N_x(B))$. 首先，对于$S \subseteq A - \{x\}$的$S \in N(X)$，有$S \subsetneqq A^C \cup \{x\}$。因此，$\inf_{S \nsubseteq B}(1 - N_x(B)) \leqslant 1 - N_x(A^C \cup \{x\}) = [x \in A']$，故

$$[\exists S((S \subseteq A - \{x\}) \wedge (S \triangleright x))] \leqslant [x \in A'].$$

基次，我们往证$[x \in A'] \leqslant [\exists S((S \subseteq A - \{x\}) \wedge (S \triangleright x))]$，若$[x \in A'] > 0$，则因$[B \in N_x \to B \cap (A - \{x\} \neq \emptyset] \geqslant A'(x)$，则对$\forall B \in (N_x)_{[1 - A'(x)]}$，有$B \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$，其中$(N_x)_{[1 - A'(x)]} = \{B | B_x(B) > 1 - A'(x)\}$是$N_x$的强$(1 - A'(x))$截集。于是$\forall B \in (N_x)_{[1 - A'(x)]}$，有$x_B \in B \cap (A - \{x\})$。此外由1.6定理(2)，不难验证$((N_x)_{[1 - A'(x)]}, \subseteq)$是一个定向集。现构造一个网$S^*$：

$$(N_x)_{[1 - A'(x)]} \to A - \{x\}, B \to x_B \in B \cap (A - \{x\})$$

则$[\exists S((S \subseteq A - \{x\}) \wedge (S \triangleright x))] \geqslant \inf_{S^* \nsubseteq B}(1 - N_x(B))$.

若$B \in (N_x)_{[1 - A'(x)]}$，则显然有$1 - N_x(B) \geqslant A'(x)$。现假设$B \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$，且$B \in (N_x)_{[1 - A'(x)]}$，因对$\forall C \subseteq B$，总有$x_C \in C \subseteq B$，于是$S^* \subsetneqq B$. 即若$S^* \subsetneqq B$且$B \in (N_x)_{[1 - A'(x)]}$，则必有$B \cap (A - \{x\}) = \emptyset$，故进而有$B \subseteq A^C \cup \{x\}$，$1 - N_x(B) \geqslant 1 - N_x(A^C \cup \{x\}) = A'(x)$. 换言之，

$$[\exists S((S \subseteq A - \{x\}) \wedge (S \triangleright x))] \geqslant \inf_{S^* \nsubseteq B})1 - N_x(B)) \geqslant A'(x) = [x \in A'].$$

(2)若$x \in A$，则是明显的，若$x \notin A$，则$A = A - \{x\}$，故而$\vDash x \in \bar{A} \leftrightarrow x \in A' \leftrightarrow \exists S((S \subseteq A - \{x\}) \wedge (S \triangleright x)) \leftrightarrow \exists S((S \subseteq A) \wedge (S \triangleright x))$.

(3) $[\forall S(S \subseteq A \to \lim S \subseteq A] = \inf_{S \subseteq A} \inf_{x \in A^C}(1 - \inf_{S \nsubseteq B}(1 - N_x(B)))$

$$= \inf_{S\subseteq A} \inf_{x\in A^C} \sup_{S\not\subseteq B} N_x(B).$$

另一方面，由$\vdash A\in\mathscr{F}\leftrightarrow \forall x(x\in \overline{A}\rightarrow x\in A)$和(2)，

$$\mathscr{F}(A) = \inf_{x\in A^C}(1-[x\in\overline{A}])$$

$$= \inf_{x\in A^C}(1-\sup_{S\subseteq A}\inf_{S\not\subseteq B}(1-N_x(B)))$$

$$= \inf_{x\in A^C}\inf_{S\subseteq A}\sup_{S\not\subseteq B} N_x(B).$$

(4)$[S\infty x] = \inf_{S\not\subseteq A}(1-N_x(A))$,

$$[\exists T((T<S)\wedge(T\triangleright x))] = \sup_{T<S}\inf_{T\not\subseteq A}(1-N_x(A)).$$

置$\mathscr{A}_S=\{A\mid S\not\subseteq A\}$，$\mathscr{B}_T=\{A\mid T\not\subseteq A\}$. 则对任意$T<S$，有$\mathscr{A}_S\subseteq\mathscr{B}_T$。实际上，令$T=S\circ K$. 若$S\not\subseteq A$，则存在$\sigma_0\in\mathscr{D}S$使得$\sigma\geqslant\sigma_0$时$S_\sigma\notin A$. 我们现往证$T\not\subseteq A$. 若不然，则存在$\mu_0\in\mathscr{D}T$使得$\mu\geqslant\mu_0$时$T_\mu\in A$。此外因$T<S$，故存在$\mu_1\in\mathscr{D}T$使得$K(\mu_1)\geqslant\sigma_0$，且因$(\mathscr{D}T,\geqslant)$是定向的，又存在$\mu_2\in\mathscr{D}T$使得$\mu_2\geqslant\mu_0,\mu_1$. 于此，$K(\mu_2)\geqslant K(\mu_1)\geqslant\sigma_0$，$S_{K(\mu_2)}\notin A$且$S_{K(\mu_2)}=T_{\mu_2}\in A$. 二者是矛盾的。因而

$$[\exists T((T<S)\wedge(T\triangleright x))] = \sup_{T<S}\inf_{A\in\mathscr{B}_T}(1-N_x(A))$$

$$\leqslant \inf_{A\in\mathscr{A}_S}(1-N_x(A)) = [S\infty x].$$

反之，设$[S\infty x]=t$，若$t=0$，则是显然的。假设$t>0$。由于$\inf_{S\not\subseteq A}(1-N_x(A))=t$，故若$A\in\mathscr{A}_S$有$1-N_z(A)\geqslant t$，即$N_x(A)\leqslant 1-t$。因此$\mathscr{A}_S\subseteq(N_x)^C_{[1-t]}$. 注意到$\inf_{A\in(N_x)^C_{[1-t]}-\mathscr{A}_S}(1-N_x(A))\geqslant t$，所以

$$t=\inf_{A\in\mathscr{A}_S}(1-N_x(A))=\inf_{A\in(N_x)^C_{[1-t]}}(1-N_x(A))$$

另一方面，因$t>0$，所以$X\in(N_x)_{[1-t]}\neq\varnothing$。且$(N_x)_{[1-t]}$中任意两个元素之交仍是其中的元，故而可以证明（略）存在$T<S$

使得 $\mathscr{B}_T\subseteq(N_x)^C_{[1-t]}$。故而由上所述再注意到$\inf_{A\in\mathscr{B}_T}(1-N_x(A))\leqslant\inf_{A\in\mathscr{A}_S}(1-N_x(A))=t$，可以得到$\inf_{A\in\mathscr{B}_T}(1-N_x(A))=\inf_{A\in(N_x)^C_{[1-t]}}(1-N_x(A))=t$，即，

$$[\exists T((T<S)\wedge(T\rhd x))]=\sup_{T<S}\inf_{A\in\mathscr{B}_T}(1-N_x(A))\geqslant t.\square$$

5.3 **定理** 若 S 是一个万有网，则

$$\models \lim S=\operatorname{adh}S.$$

5.4 **引理** $\models(S\rhd x)\leftrightarrow\forall A(x\in A\in\mathscr{T}\rightarrow S\subseteq A)$.

证明 注意到若 $S\not\subseteq A$；$B\subseteq A$ 时 $S\not\subseteq B$，故

$$[S\rhd x]=1-\sup_{S\not\subseteq A}\sup_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}(B)\geqslant 1-\sup_{S\not\subseteq B,x\in B}\mathscr{T}(B)$$

$$=[\forall A(x\in A\in\mathscr{T}\rightarrow S\not\subseteq A))].$$

其逆是显然的 .□

5.5 **定理** 若 D 是一个定向集，$S^{(m)}=\{s(m,n),n\in E_m\}\in N(X)(m\in D)$，$\bar{S}=\{\bar{s}(m),m\in D\}\in N(X)$，$S\circ R$ 是由$S^{(m)}(m\in D)$诱导的叠网，即，

$$S\circ R(m,f)=s(m,f(m)),(m,f)\in D\times\bigtimes_{m\in D}E_m,$$

则$\models\forall_m(m\in D)\rightarrow(S^{(m)}\rhd\bar{s}(m)))\wedge(\bar{s}\rhd x)\rightarrow S\circ R\rhd x$

证明 由 5.4 引理，

$$[\forall m((m\in D)\rightarrow(S^{(m)}\rhd\bar{S}(m)))\wedge(\bar{s}\rhd x)]$$

$$=1-\sup_{m\in D}\sup_{s^{(m)}\not\subseteq A,\bar{s}(m)\in A}\mathscr{T}(A)\vee\sup_{\bar{S}\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)$$

$$[S\circ R\rhd x]=1-\sup_{S\circ R\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)$$

故而，只需证明

$$\sup_{m\in D}\sup_{S^{(m)}\not\subseteq A,\bar{s}(m)\in A}\mathscr{T}(A)\vee\sup_{\bar{S}\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)\geqslant\sup_{S\circ R\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A).$$

实际上，若$\sup_{S\circ R\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)>t$，则存在 A_0，使得 $x\in A_0$；$S\circ R\not\subseteq A$。且 $\mathscr{T}(A_0)>t$。因此，对 $\forall(m,f)\in D\times\bigtimes_{m\in D}E_m$，有

$(n,g)\in D\times \bigtimes_{m\in D}E_m$ 使得$(n,g)\geqslant(m,f)$，但$S\circ R(n,g)=S(n,g(n))\notin A$，所以对$\forall m\in D, S^{(m)}\not\subseteq A$。.

第一种情形，若有$m_0\in D$使得$\bar{S}(m_0)\in A_0$，则

$$\sup_{m\in D}\sup_{S^{(m)}\not\subseteq A,\bar{s}(m)\in A}\mathscr{T}(A)\geqslant\sup_{S^{(m)}\not\subseteq A,\bar{S}(m_0)\in A}\mathscr{T}(A)\geqslant\mathscr{T}(A_0)>t.$$

第二种情形，若对$\forall m\in D, \bar{S}(m)\notin A_0$，则$\bar{S}\not\subseteq A_0$，故而有$\sup_{\bar{S}\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)\geqslant\mathscr{T}(A_0)>t$.

综上，总有

$$\sup_{m\in D}\sup_{S^{(m)}\not\subseteq A,\bar{s}(m)\in A}\mathscr{T}(A)\vee\sup_{\bar{S}\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)>t.$$

现令$\lambda=\sup_{S\circ R\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)$. 则有正整数$n$，使

$$\sup_{m\in D}\sup_{S^{(m)}\not\subseteq A,\bar{s}(m)\in A}\mathscr{T}(A)\vee\sup_{\bar{S}\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)>\lambda-1/n,$$ 进而，

$$\sup_{m\in D}\sup_{S^{(m)}\not\subseteq A,\bar{s}(m)\in A}\mathscr{T}(A)\vee\sup_{\bar{S}\not\subseteq A,x\in A}\mathscr{T}(A)\geqslant\lambda.\square$$

最后，我们给出滤子收敛概念。

5.6 **定义** 设$F(X)$是X上的所有滤子的集合，二元不分明谓词$\triangleright,\infty\in\mathscr{F}(F(X)\times X)$定义为：

$$\left.\begin{aligned}K\triangleright x&:=\forall A(A\in N_x\to A\in K),\\K\infty x&:=\forall A(A\in K\to x\in\bar{A}).\end{aligned}\right.\qquad K\in F(X)$$

不分明集

$$\lim K=\int_X[K\triangleright x]/x,\ \mathrm{adh}K=\int_X[K\infty x]/x$$

分别称作K的极限集和接触集。

5.7 **定理** (1)若$S\in N(X)$，K^S是相应于S的滤子，即，$K^S=\{A\mid S\subsetneqq A\}$，则

$(a)\vDash\lim K^S=\lim S$;

$(b)\vDash\mathrm{adh}K^S=\mathrm{adh}S$.

(2)若$K\in F(X)$，S^K是相应于K的网，即$S^K:D\to X$，$(x,$

$A)\mapsto x,(x,A)\in D$，其中 $D=\{(x,A)\mid x\in A\in K\}$，$(x,A)\geqslant(y,B)$ 当且仅当 $A\subseteq B$，则

$(a)\models \lim S^K=\lim K$；

$(b)\models \operatorname{adh} S^K=\operatorname{adh} K$.

证明 (1)对 $\forall x\in X$，有

$(a)\lim K^S(x)=\inf\limits_{A\notin K^S}(1-N_x(A))=\inf\limits_{S\nsubseteq A}(1-N_x(A))=\lim S(x)$.

$$(b)\operatorname{adh} K^S(x)=\inf_{A\in K^S}\overline{A}(x)=\inf_{S\subseteq A}(1-N_x(A^C))$$
$$=\inf_{S\nsubseteq A^C}(1-N_x(A^C))=\operatorname{adh} S(x).$$

(2)只需注意 $S^K\nsubseteq A$ 当且仅当 $A\notin K$ 及 $S^K\nsubseteq A$ 当且仅当 $A\in K$，证明完全类似于(1).□

§6 子空间

6.1 **引理** 设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，$Y\subseteq X$。令

$V\in\mathscr{T}|_Y:=(\exists u)((u\in\mathscr{T})\wedge(V=u\cap Y))$，

即，$\mathscr{T}|_Y=\int_{\mathscr{P}(Y)}\sup\limits_{V=u\cap Y}\mathscr{T}(u)/V$.

则 $\mathscr{T}|_Y\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(Y))$是 Y 上的一个不分明化拓扑。

证明 明显对 $\forall V_\lambda\in\mathscr{P}(Y)(\lambda\in\Lambda)$，$(\mathscr{T}|_Y)(\varnothing)=(\mathscr{T}|_Y)(Y)=1$.

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}(\mathscr{T}|_Y)(V_\lambda)=\inf_{\lambda\in\Lambda}\sup_{V_\lambda=u_\lambda\cap Y}\mathscr{T}(u_\lambda)$$
$$=\sup_{f\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mu_\lambda}\inf_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}(f(\lambda))$$
$$\leqslant\sup_{f\in\prod_{\lambda\in\Lambda}\mu_\lambda}\mathscr{T}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f(\lambda)).$$

其中 $\mu_\lambda=\{u_\lambda\in\mathscr{P}(Y):V_\lambda=u_\lambda\cap Y\}(\lambda\in\Lambda)$.

因 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}f(\lambda)\cap Y=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(f(\lambda)\cap Y)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$，故有

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}(\mathscr{T}|_Y)(V_\lambda)\leqslant(\mathscr{T}|_Y)(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda).$$

类似可以证得对任意 $V_1,V_2\in\mathscr{P}(Y)$,

$$\min((\mathscr{T}|_Y)(V_1),(\mathscr{T}|_Y)(V_2))\leqslant(\mathscr{T}|_Y)(V_1\cap V_2).\ \square$$

6.2 **定义** (1)设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，$Y\subseteq X$，则$\mathscr{T}|_Y$称为Y的相对于$\mathscr{T}$的不分明化拓扑，也称$\mathscr{T}$在Y上的诱导拓扑。

(2)设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间，若$Y\subseteq X$，$\mathscr{U}=\mathscr{T}|_Y$，则称$(Y,\mathscr{U})$为$(X,\mathscr{T})$的子空间。

6.3 **引理** 若$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，$(Z,\mathscr{V})$是$(Y,\mathscr{U})$的子空间，则$(Z,\mathscr{V})$也是$(X,\mathscr{T})$的子空间。

证明 因$Z\subseteq Y\subseteq X$，故$\mathscr{U}=\mathscr{T}|_Y$，$\mathscr{V}=\mathscr{U}|_Z$，现往证$\mathscr{V}=\mathscr{T}|_Z$，对$\forall W\in\mathscr{P}(Z)$，

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(W)&=\sup_{W=V\cap Z}\mathscr{U}(V)=\sup_{W=V\cap Z}\ \sup_{V=U\cap Y}\mathscr{T}(U)\\&=\sup_{W=U\cap Y\cap Z}\mathscr{T}(U)=\sup_{W=U\cap Z}\mathscr{T}(U)=(\mathscr{T}|_Z)(W).\ \square\end{aligned}$$

6.4 **定理** 设$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间，则对任意$A\subseteq Y$，$y\in Y$，

(1)$\models A\in\mathscr{F}_Y\leftrightarrow(\exists F)((F\in\mathscr{F}_Z)\wedge(A=F\cap Y))$，

其中$\mathscr{F}_Z$、$\mathscr{F}_Y$分别是X和Y中的闭集簇。

(2)$\models y\in A'_Y\leftrightarrow y\in A'_X$

其中A'_X、A'_Y分别是A在X和Y中的$\mathscr{T}$，$\mathscr{U}$—导集。

(3)$\models Cl_YA\equiv Cl_XA\cap Y$，

其中Cl_XA，Cl_YA分别是A在X和Y中的$\mathscr{T}$、$\mathscr{U}$—闭包。

证明

$$\begin{aligned}(1)[(\exists F)((F\in\mathscr{F}_Z)\wedge(A=F\cap Y))]&=\sup_{A=F\cap Y}\mathscr{F}_X(F)\\&=\sup_{A=F\cap Y}\mathscr{T}(X\sim F)=\sup_{Y\sim A=(X\sim F)\cap Y}\mathscr{T}(X\sim F)\\&=\mathscr{U}(Y\sim A)=\mathscr{F}_Y(A).\end{aligned}$$

(2)首先注意到$y\in C\subseteq(X\sim A)\cup\{y\}$当且仅当$y\in C\cap Y$

$\subseteq (Y \sim A) \cup \{y\}$.

实际上，由 $y \in Y$ 和 $A \subseteq Y$，可知若 $y \in C \subseteq (X \sim A) \cup \{y\}$，则

$$y \in C \cap Y \subseteq ((X \sim A) \cup \{y\}) \cap Y = ((X \sim A) \cap Y) \cup \{y\}$$
$$= (Y \sim A) \cup \{y\};$$

若 $y \in C \cap Y \subseteq (Y \sim A) \cup \{y\}$，

则 $y \in C \subseteq ((C \cap Y) \cup (X \sim Y) \subseteq (Y \sim A) \cup \{y\} \cup \{Z \sim Y\}$
$$= ((Y \sim A) \cup (X \sim Y)) \cup \{y\} = (X \sim A) \cup \{y\};$$

因此，

$$N_y^Y((Y \sim A) \cup \{y\}) = \sup_{y \in B \subseteq (Y \sim A) \cup \{y\}} \mathscr{U}(B)$$
$$= \sup_{y \in B \subseteq (Y \sim A) \cup \{y\}} \sup_{B = C \cap Y} \mathscr{T}(C)$$
$$= \sup_{y \in C \cap Y \subseteq (Y \sim A) \cup \{y\}} \mathscr{T}(C)$$
$$= \sup_{y \in C \subseteq (X \sim A) \cup \{y\}} \mathscr{T}(C) = N_y^X((X \sim A) \cup \{y\}).$$

故而，

$$[y \in A_Y'] = 1 - N_y^Y((Y \sim A) \cup \{y\})$$
$$= 1 - N_y^X((X \sim A) \cup \{y\}) = [y \in A_X'].$$

其中 N^X, N^Y 分别表示 X 和 Y 中的 $\mathscr{T}$、$\mathscr{U}$—邻域系。

(3) 对 $\forall y \in Y$，若 $y \in A$，则 $(Cl_Y A)(y) = (Cl_X A \cap Y)(y) = 1$；若 $y \notin A$，则 $(Cl_Y A)(y) = A_Y'(y) = A_X'(y) = (Cl_X A)(y) = (Cl_X A \cap Y)(y)$. □

6.5 **定理** 设 $(Y, \mathscr{U})$ 是 $(X, \mathscr{T})$ 的子空间，$N_x (x \in X)$ 是 $(X, \mathscr{T})$ 的邻域系，对 $x \in Y$，定义 $N_x^Y \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 如下：

$$A \in N_x^Y := (\exists B)((B \in N_x) \wedge (B \cap Y = A).$$

则 $N_x^Y (x \in Y)$ 是子空间 $(Y, \mathscr{U})$ 的不分明化邻域系，称它为由 N_x $(x \in X)$ 在 Y 上诱导的邻域系。

证明

往证 $N_x^Y(A)=\sup\limits_{x\in B\subseteq A}\mathscr{U}(B)=\sup\limits_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}|_Y(B)$. 事实上，

$$\begin{aligned}N_x^Y(A)&=\sup_{B\cap Y=A}N_x(B)=\sup_{x\in B\cap Y=A}N_x(B)\\&=\sup_{x\in B\cap Y=A}\ \sup_{x\in C\subseteq B}\mathscr{T}(C)=\sup_{x\in C\cap Y\subseteq A}\mathscr{T}(C)\\&=\sup_{x\in D\subseteq A}\ \sup_{C\cap Y=D}\mathscr{T}(C)=\sup_{x\in D\subseteq A}\mathscr{T}|_Y(D)\\&=\sup_{x\in B\subseteq A}\mathscr{U}(B).\ \square\end{aligned}$$

§7 连续函数

7.1 **定义** 设$(X、\mathscr{T})$、$(Y、\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间。一元不分明谓词 $C\in\mathscr{F}(Y^X)$称作是不分明连续的，若

$$C(f):=(\forall U)((U\in\mathscr{U})\rightarrow(f^{-1}(U)\in\mathscr{T}))$$

即，$[C(f)]=\inf\limits_{U\subseteq Y}\min(1,1-\mathscr{U}(U)+\mathscr{T}(f^{-1}(U)))$.

7.2 **引理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$、$(Z,\mathscr{V})$是三个不分明化拓扑空间，则对$\forall f\in Y^Z$, $\forall g\in Z^Y$

(1) $\models C(f)\rightarrow(C(g)\rightarrow C(g\circ f))$;

(2) $\models C(g)\rightarrow(C(f)\rightarrow C(g\circ f))$.

证明 我们仅就(1)加以证明，即证明$[C(f)]\leqslant[C(g)\rightarrow C(g\circ f)]$。如果$[C(g)]\leqslant[C(g\circ f)]$，则是显然的，若$[C(g)]>[C(g\circ f)]$，则

$$\begin{aligned}[C(g)]-[C(g\circ f)]&=\inf_{V\in\mathscr{F}(Z)}\min(1.1-\mathscr{V}(V)+\mathscr{U}(g^{-1}(V)))\\&\quad-\inf_{C\in\mathscr{F}(Z)}\min(1,1-\mathscr{V}(V)+\mathscr{T}(f^{-1}(g^{-1}(V))))\\&\leqslant\sup_{V\in\mathscr{F}(Z)}(\mathscr{U}(g^{-1}(V))-\mathscr{T}(f^{-1}(g^{-1}(V))))\\&\leqslant\sup_{U\in\mathscr{F}(Y)}(\mathscr{U}(U)-\mathscr{T}(f^{-1}(U))).\end{aligned}$$

因而

$$[C(g)-C(g\circ f)]=\min(1,1-[C(g)]+[C(g\circ f)])$$

$$\geqslant \inf_{U\in\mathscr{T}(Y)} \min(1, 1-\mathscr{U}(U)+\mathscr{T}(f^{-1}(U)))$$
$$=[C(f)].\square$$

7.3 引理 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间，$A\subseteq X$，则对任意$f\in Y^X$，有

$$\models C(f)\rightarrow C(f|A).$$

证明

$$[C(f|A)]=\inf_{U\in\mathscr{T}(Y)}\min(1, 1-\mathscr{U}(U)+(\mathscr{T}|A)((f|A)^{-1}(U)))$$
$$=\inf_{U\in\mathscr{T}(Y)}\min(1, 1-\mathscr{U}(U)+(\mathscr{T}|A)(A\cap f^{-1}(U)))$$
$$\geqslant \inf_{U\in\mathscr{T}(Y)}\min(1, 1-\mathscr{U}(U)+\mathscr{T}(f^{-1}(U)))=[C(f)].\square$$

7.4 定理 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间。$\forall f\in Y^X$，令

(1)$\alpha_1(f)=(\forall F)((F\in\mathscr{F}_Y)\rightarrow(f^{-1}(F)\in\mathscr{F}_X))$，

其中$\mathscr{F}_X,\mathscr{F}_Y$分别是$X$和$Y$的不分明闭子集族；

(2)$\alpha_2(f)=(\forall U)((U\in\mathscr{S}_Y)\rightarrow(f^{-1}(U)\in\mathscr{T}))$，

其中$\mathscr{S}_Y$是$\mathscr{U}$的子基；

(3)$\alpha_3(f)=(\forall x)(\forall u)((u\in N^Y_{f(x)})\rightarrow(f^{-1}(u)\in N^X_x)))$，

其中N^X,N^Y分别是X和Y的不分明化邻域系。

(4)$\alpha_4(f)=(\forall x)(\forall u)((u\in N^Y_{f(x)})\rightarrow(\exists v)((v\in N^X_x)\rightarrow f(v)\subseteq U)))$；

(5)$\alpha_5(f)=(\forall x)(\forall s)((s\in N(X))\wedge(S\rhd x)\rightarrow f\circ s\rhd f(x))$；

(6)$\alpha_6(f)=(\forall A)(f(Cl_XA)\subseteq Cl_Yf(A))$；

其中Cl_X,Cl_Y分别是X和Y上的闭包算子；

(7)$\alpha_7(f)=(\forall B)(Cl_Xf^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(Cl_YB))$.

则有$\vdash C(f)\leftrightarrow\alpha_i(f), i=1,2,\cdots,7.$

证明

(a)首先证明$[C(f)]=[\alpha_1(f)]$.

$$[\alpha_1(f)]=\inf_{F\in\mathscr{F}(Y)}\min(1,1-\mathscr{F}_Y(F)+\mathscr{F}_X(f^{-1}(F))$$
$$=\inf_{F\in\mathscr{F}(Y)}\min(1,1-\mathscr{U}(Y\sim F)+\mathscr{T}(X\sim f^{-1}(F)))$$
$$=\inf_{F\in\mathscr{F}(Y)}\min(1,1-\mathscr{U}(Y\sim F)+\mathscr{T}(f^{-1}(Y\sim F)))$$
$$=\inf_{U\in\mathscr{P}(Y)}\min(1,1-\mathscr{U}(U)+\mathscr{T}(f^{-1}(U)))=[C(f)].$$

(b)往证$[C(f)]=[\alpha_2(f)]$,因为$\mathscr{S}_Y\subseteq\mathscr{U}$,因此$[C(f)]\leqslant[\alpha_2(f)]$是显然的。因$[C(f)]=\inf_{U\in\mathscr{P}(Y)}\min(1,1-\mathscr{U}(U)+\mathscr{T}(f^{-1}(U)))$,因此要证明$[C(f)]\geqslant[\alpha_2(f)]$,只需要证明$\min(1,1-\mathscr{U}(U)+\mathscr{T}(f^{-1}(U)))\geqslant[\alpha_2(f)]$.若$\mathscr{U}(U)\leqslant\mathscr{T}(f^{-1}(U))$,则不必待言。若$\mathscr{U}(U)>\mathscr{T}(f^{-1}(U))$,则对$\forall\lambda>0$,存在$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(Y)$使得$U=\bigcup\mathscr{A}$且$\mathscr{U}(U)-\lambda\leqslant\inf_{A\in\mathscr{A}}\mathscr{S}_Y{}^{(\cap)}(A)$。进而,对$\forall A\in\mathscr{A}$,存在$\mathscr{B}_A\Subset\mathscr{P}(Y)$,使得$A=\bigcap\mathscr{B}_A$且

$$\mathscr{S}_Y{}^{(\cap)}(A)-\lambda\leqslant\min_{B\in\mathscr{B}_A}\mathscr{S}_Y(B),\ \mathscr{U}(U)-2\lambda\leqslant\inf_{A\in\mathscr{A}}\min_{B\in\mathscr{B}_A}\mathscr{S}_Y(B)$$

因$f^{-1}(U)=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\bigcap_{B\in\mathscr{B}_A}f^{-1}(B)$,则有$\mathscr{T}(f^{-1}(U))\geqslant\inf_{A\in\mathscr{A}}\min_{B\in\mathscr{B}_A}\mathscr{T}(f^{-1}(B))$.

$$\mathscr{U}(U)-\mathscr{T}(f^{-1}(U))\leqslant\inf_{A\in\mathscr{A}}\min_{B\in\mathscr{B}_A}\mathscr{S}_Y(B)-\inf_{A\in\mathscr{A}}\min_{B\in\mathscr{B}_A}\mathscr{T}(f^{-1}(B))+2\lambda.$$

不失一般性,我们可以假设$\lambda\leqslant\frac{1}{2}(\mathscr{U}(U)-\mathscr{T}(f^{-1}(U)))$.因此有

$$\inf_{A\in\mathscr{A}}\min_{B\in\mathscr{B}_A}\mathscr{S}_Y(B)\geqslant\inf_{A\in\mathscr{A}}\min_{B\in\mathscr{B}_A}\mathscr{T}(f^{-1}(B)).$$

$$\mathscr{U}(U)-\mathscr{T}(f^{-1}(U))\leqslant\sup_{A\in\mathscr{A}}\max_{B\in\mathscr{B}_A}(\mathscr{S}_Y(B)-\mathscr{T}(f^{-1}(B)))+2\lambda,$$

$\min(1,1-\mathscr{U}(U)+\mathscr{T}(f^{-1}(U)))\geqslant\inf_{A\in\mathscr{A}}\min_{B\in\mathscr{B}_\lambda}\min(1,1-\mathscr{S}_Y(B)+\mathscr{T}$

$(f^{-1}(B)))-2\lambda \geqslant [\alpha_2(f)]-2\lambda$
因而由 λ 的任意性可知结论是成立的。

(c)现证明$[C(f)]\leqslant[\alpha_3(f)]$. 因

$$[\alpha_3(f)]=\inf_{x\in X}\inf_{U\in\mathscr{P}(Y)}\min(1,1-N^Y_{f(x)}(U)+N^X_x(f^{-1}(U))),$$

故而只需证明对 $\forall x\in X$, $\forall u\in\mathscr{P}(Y)$, $\min(1,1-N^Y_{f(x)}(U)+N^X_x(f^{-1}(U)))\geqslant[C(f)]$. 若 $N^Y_{f(x)}(U)\leqslant N^X_x(f^{-1}(U))$, 则自不待言, 现假设 $N^Y_{f(x)}(U)>N^X_x(f(u))$. 由于从 $f(x)\in A\subseteq U$ 可以推出 $x\in f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(U)$。因此

$$N^Y_{f(x)}(U)-N^X_x(f^{-1}(U))=\sup_{f(x)\in A\subseteq U}\mathscr{U}(A)-\sup_{x\in B\subseteq f^{-1}(U)}\mathscr{T}(B)$$
$$\leqslant\sup_{f(x)\in A\subseteq U}\mathscr{U}(A)-\sup_{f(x)\in A\subseteq U}\mathscr{T}(f^{-1}(A))\leqslant\sup_{f(x)\in A\subseteq U}(\mathscr{U}(A)-\mathscr{T}(f^{-1}(A))).$$ $\min(1,1-N^Y_{f(x)}(U)+N^X_x(f^{-1}(U)))\geqslant \inf_{f(x)\in A\subseteq U}\min(1,1-\mathscr{U}(A)+\mathscr{T}(f^{-1}(A)))\geqslant\inf_{V\in\mathscr{P}(Y)}\min(1,1-\mathscr{U}(V)+\mathscr{T}(f^{-1}(V)))=[C(f)]$.

(d)证明结论$[\alpha_3(f)]=[\alpha_4(f)]$, 由于 $ff^{-1}(U)\subseteq U$, 故

$$\begin{aligned}[\alpha_4(f)]&=\inf_{x\in X}\inf_{U\in\mathscr{P}(Y)}\min(1,1-N^Y_{f(x)}(U)+\sup_{V\in\mathscr{P}(X)f(V)\subseteq U}N^X_x(V))\\&\geqslant\inf_{x\in X}\inf_{U\in\mathscr{P}(Y)}\min(1,1-N^Y_{f(x)}(U)+N^X_x(f^{-1}(U)))\\&=[\alpha_3(f)].\end{aligned}$$

因 $f(V)\subseteq U$ 时, $V\subseteq f^{-1}(U)$, $N^X_x(V)\leqslant N^X_x(f^{-1}(U))$, 故反向不等式也是成立的。

(e)因为$[\alpha_5(f)]=\inf_{x\in X}\inf_{S\in N(X)}\min(1,1-[S\rhd x]+[f\circ S\rhd f(x)])$

故而欲证明$[\alpha_3(f)]\leqslant[\alpha_5(f)]$, 只要证明对 $\forall x\in X$ 和 $S\in N(X)$,

$$\min(1,1-[S\rhd x]+[f\circ s\rhd f(x)])\geqslant[\alpha_3(f)].$$

若$[s \rhd x] \leqslant [f\circ s \rhd f(x)]$则是明显的。设$[s \rhd x] > [f\circ s \rhd f(x)]$.

因为从 $f\circ s \not\subseteq B$ 可推出$S \not\subseteq f^{-1}(B)$,所以

$$[s \rhd x] - [f\circ s \rhd f(x)]$$

$$= \inf_{A\in\mathscr{P}(X), S\not\subseteq A} \min(1, 1 - N_x^X(A)) - \inf_{B\in\mathscr{P}(Y), f\circ s\not\subseteq B} \min(1, 1 - N_{f(x)}^Y(B))$$

$$\leqslant \sup_{B\in\mathscr{P}(Y), f\circ s\not\subseteq B} (N_{f(x)}^Y(B) - N_x^X(f^{-1}(B))),$$

$$\min(1, 1 - [s \rhd x] + [f\circ s \rhd f(x)])$$

$$\geqslant \inf_{B\in\mathscr{P}(x), f\circ s\not\subseteq B} \min(1, 1 - N_{f(x)}^Y(B) + N_x^X(f^{-1}(B)))$$

$$\geqslant \inf_{U\in\mathscr{P}(Y)} \min(1, 1 - N_{f(x)}^Y(U) + N_x^X(f^{-1}(U))) = [\alpha_3(f)].$$

(f)下面证明$[\alpha_5(f)] \leqslant [\alpha_6(f)]$,我们以$^-$替代 Cl_X 和Cl_Y 以求简便。注意到

$$[\alpha_6(f)] = \inf_{A\in\mathscr{P}(X)} \inf_{y\in Y} (1, 1 - f(\bar{A})(y) + \overline{f(A)}(y)),$$

故对$\forall A \in \mathscr{P}(X)$和$y\in Y$。当$f(\bar{A})(y) \leqslant \overline{f(A)}(y)$是显见的,现若$f(\bar{A})(y) > \overline{f(A)}(y)$,则由 5.2 定理(2)可得到:

$$f(\bar{A})(y) - \overline{f(A)}(y)$$

$$= \sup_{f(x)=y} \sup_{S\subseteq A} [s \rhd x] - \sup_{T\subseteq f(A)} [T \rhd y]$$

$$\leqslant \sup_{f(x)=y} \sup_{S\subseteq A} [s \rhd x] - \sup_{f(x)=y} \sup_{S\subseteq A} [f\circ s \rhd f(x)]$$

$$\leqslant \sup_{f(x)=y} \sup_{S\subseteq A} ([s \rhd x] - [f\circ s \rhd f(x)]),$$

$$\min(1, 1 - f(\bar{A})(y) + \overline{f(A)}(y))$$

$$\geqslant \inf_{f(x)=y} \inf_{S\subseteq A} \min(1, 1 - [s \rhd x] + [f\circ s \rhd f(x)])$$

$$\geqslant \inf_{x\in X} \inf_{S\in N(X)} \min(1, 1 - [s \rhd x] + [f\circ s \rhd f(x)])$$

$$= [\alpha_5(f)].$$

从而有$[\alpha_6(f)] \geqslant [\alpha_5(f)]$.

(g)对$\forall B \in \mathscr{P}(Y)$, $f^{-1} f\,\overline{(f^{-1}(B))} \supseteq \overline{f^{-1}(B)}$, $ff^{-1}(B) \subseteq$

$B, \overline{ff^{-1}(B)} \subseteq \bar{B}, f^{-1}\overline{ff^{-1}(B))} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$,因此

$$[\overline{f^{-}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})] \geqslant [f^{-1}f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq f^{-1}(\bar{B})]$$
$$\geqslant [f^{-1}f(\overline{f^{-1}(B)}) \underbrace{\subseteq f^{-1}}(\overline{ff^{-1}(B)})]$$
$$\geqslant [f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{ff^{-1}(B)}].$$

所以,$[\alpha_7(f)] = \inf_{B \in \mathcal{P}(Y)} [\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})]$
$$\geqslant \inf_{B \in \mathcal{P}(Y)} [f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{ff^{-1}(B)}]$$
$$\geqslant \inf_{A \in \mathcal{P}(X)} [f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}] = [\alpha_6(f)].$$

(h)最后我们来证明$\vDash \alpha_7(f) \to \alpha_1(f)$,由 3.6 定理(4)$\vDash A \in \mathcal{F}_X \leftrightarrow A \supseteq \bar{A}$,因此

$\vDash \alpha_1(f) \leftrightarrow (\forall F)((Cl_Y F \subseteq F) \to (Cl_X(f^{-1}(F)) \subseteq f^{-1}(F))$,
从而由$\vDash (\tilde{A} \subseteq \tilde{B}) \to ((\tilde{B} \subseteq \tilde{C}) \to (\tilde{A} \subseteq \tilde{C}))$及$\vDash (\tilde{C} \subseteq \tilde{D}) \to (f^{-1}(\tilde{C}) \subseteq f^{-1}(\tilde{D}))$, $\vDash \alpha_7(f) \leftrightarrow (\forall F)(Cl_X f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(Cl_Y F)) \to (\forall F)((f^{-1}(Cl_Y F) \subseteq f^{-1}(F)) \to (Cl_X f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(F)) \to (\forall F)((Cl_Y F) \subseteq F) \to (Cl_X(f^{-1}(F)) \subseteq f^{-1}(F)) \to \alpha(f)$.□

7.5 **定义** 设$(X, \mathcal{T})$、$(Y, \mathcal{U})$是两个不分明化拓扑空间,$\forall x \in X$,一元不分明谓词$C_x \in \mathcal{F}(Y^X)$称作是在x处不分明连续的,若

$$C_x(f) := (\forall U)((U \in N^Y_{f(x)}) \to (f^{-1}(U) \in N^X_x))$$

即,若f在x处连续,则

$$[C_x(f)] = \inf_{U \subseteq Y} \min(1, 1 - N^Y_{f(x)}(U) + N^X_x(f^{-1}(U))).$$

7.6 **定理** 设$(X, \mathcal{T})$、$(Y, \mathcal{U})$是两个不分明化拓扑空间,对$\forall x \in X, f \in Y^X$,令

(1)$\alpha^x_4(f) = (\forall U)((U \in N^Y_{f(x)}) \to (\exists V)((V \in N^X_x) \wedge (f(V) \subseteq U)))$,

(2)$\alpha^x_5(f) = (\forall S)((S \in N(X)) \wedge (s \rhd x) \to (f \circ s \rhd f(x)))$.

则$\models C_x(f)\leftrightarrow\alpha_i^x(f), i=4.5$.

证明　完全类似于7.4定理中的相应步骤可以得到$\models C_x(f)\leftrightarrow\alpha_4^x(f)$和$\models C_x(f)\rightarrow\alpha_5^x(f)$，现只需证明$[C_x(f)]\geqslant[\alpha_5^x(f)]$。若$[C_x(f)]<t$，则存在$U\in\mathscr{P}(Y)$使得$1-N_{f(x)}^Y(U)+N_x^X(f^{-1}(U))<t$. 若置$\lambda=N_x^X(f^{-1}(U))$，则由1.7定理(2)可知$((N_x^X)_{[\lambda]},\subseteq)$是一个定向集且$f^{-1}(U)\in(N_x^X)_{[\lambda]}$. 又由1.7定理(3)知对$\forall V\in(N_x^X)_{[\lambda]}$，存在$x_v\in f^{-1}(U)$且$x_v\in V$，考虑网$S:(N_x^X)_{[\lambda]}\rightarrow X, V\rightarrow x_v$，则$\forall V\in(N_x^X)_{[\lambda]}, S\subseteq V$，即$S\not\subseteq A$导出$N_x^X(A)\leqslant\lambda$。因此，$[s\triangleright x]=\inf\limits_{S\not\subseteq A}(1-N_x^X(A))\geqslant 1-\lambda$. 因为$f\circ s\not\subseteq u$，有$[f\circ s\triangleright f(x)]=\inf\limits_{f\circ s\not\subseteq B}(1-N_{f(x)}^Y(B))\leqslant 1-N_{f(x)}^Y(u)<t-\lambda$，于是$[\alpha_5^x(f)]=\min(1,1-[s\triangleright x]+[f\circ s\triangleright f(x)])<t$。

由t的任意性，结论是成立的。□

7.7　**定理**　设$(X,\mathscr{T}),(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间。则对$\forall f\in Y^X$,

$$\models C(f)\leftrightarrow(\forall x)C_x(f).$$

7.8　**定义**　设Σ是一类不分明化拓扑空间，称二元不分明谓词$H\in\mathscr{F}(\Sigma\times\Sigma)$是不分明同胚，若

$$H(X,Y):=(\exists f)((M(f)\wedge(C(f)\dot{\wedge}C(f^{-1}))).$$

其中$M(f)$表示f是一个双射。即，若X和Y是同丕的，则

$[H(X,Y)]=\inf\{\max(0,[C(f)]+[C(f^{-1})]-1:f$是从$X$到$Y$上的双射$\}$。

§8　不分明化拓扑中的半开集和半连续函数

我们首先讨论不分明化拓扑中的半开集。

8.1 **定义** 设 X 是一个不分明化拓扑空间，一元不分明谓词 $\mathscr{T}_S\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 称为是不分明半开的，若：

$$A\in\mathscr{T}_S:=(\exists B)((B\in\mathscr{T})\wedge(B\subseteq A)\wedge(A\subseteq B^-))$$

即：$\mathscr{T}_S(A)=\sup_{B\subseteq A}\min(\mathscr{T}(B).\inf_{X\in A}B^-(x))$

明显的有 $\vDash A\in\mathscr{T}\to A\in\mathscr{T}_S$

8.2 **定理** 对任意的 A、$B\subseteq X$，

$$\vDash A\in\mathscr{T}_S\wedge B\in\mathscr{T}\to A\cap B\in\mathscr{T}_S$$

证明 当 $[A\in\mathscr{T}_S\wedge B\in\mathscr{T}]=0$ 时，显然成立。现设 $[A\in\mathscr{T}_S\wedge B\in\mathscr{T}]>\lambda>0$，则 $\mathscr{T}(B)>\lambda$，$\mathscr{T}_S(A)=\sup_{D\subseteq A}(\mathscr{T}(D)\wedge[A\subseteq D^-])>\lambda$。因此存在 $D\subseteq X$，使 $D\subseteq A$，$\mathscr{T}(D)>\lambda$，且 $[A\subseteq\bar{D}]>\lambda$，$\mathscr{T}(B\cap D)\geqslant\mathscr{T}(B)\wedge\mathscr{T}(D)>\lambda$，$B\cap D\subseteq A\cap B$，同时有 $[A\cap B\subseteq B\cap\bar{D}]=\inf_{x\in A\cap B}(B\cap\bar{D})(x)=\inf_{x\in A\cap B}(B(x)\wedge\bar{D}(x))=\inf_{x\in A\cap B}\bar{D}(x)\geqslant\inf_{x\in A}\bar{D}(x)=[A\subseteq\bar{D}]>\lambda$。因为 $(\overline{B\cap D})(x)=\sup_U(N_x(U)\propto(U\cap(B\cap D)\neq\emptyset))\geqslant\sup_U(N_x(U\cap B)\propto((U\cap B)\cap D\neq\emptyset))\geqslant\sup_V(N_x(V)\propto(V\cap D\neq\emptyset))=\bar{D}(x)\geqslant B(x)\wedge\bar{D}(x)=(B\cap\bar{D})(x)$. 故 $[B\cap\bar{D}\subseteq\overline{B\cap D}]=1$. 因此 $[A\cap B\subseteq\overline{B\cap D}]=[A\cap B\subseteq B\cap\bar{D}]\otimes[B\cap\bar{D}\subseteq\overline{B\cap D}]=\lambda\otimes1=\lambda$.

从而有 $\mathscr{T}_S(A\cap B)=\sup_{E\subseteq A\cap B}(\mathscr{T}(E)\wedge[A\cap B\subseteq\bar{E}])\geqslant\mathscr{T}(B\cap D)\wedge[A\cap B\subseteq\overline{B\cap D}]>\lambda$. 即 $\mathscr{T}_S(A\cap B)\geqslant\mathscr{T}_S(A)\wedge\mathscr{T}(B)$. □

8.3 **定理** 对任意的 $A\subseteq X$，

$\vDash A\in\mathscr{T}_S\to(\exists D)(D\doteq A^\circ\to\forall x(x\in A\to\forall B(B\in N_x\to B\cap D\neq\emptyset)))$.

证明 由§4 4.2 定理(1)，$[D\doteq A^\circ]\leqslant\mathscr{T}(D)$，故而

$[\exists D(D\doteq A^\circ\to\forall x(x\in A\to\forall B(B\in N_x\to B\cap D\neq\emptyset)))]$

$=\sup_{D\subseteq X}[(D\doteq A^\circ]\propto[A\subseteq\bar{D}])\geqslant\sup_{D\subseteq X}(\mathscr{T}(D)\propto[A\subseteq\bar{D}])\geqslant\sup_{D\subseteq A}(\mathscr{T}$

$(D) \propto [A \subseteq \bar{D}]) = [A \in \mathscr{T}_S]$. □

8.4 **定理** 对任意的 $A \subseteq X$,

$\vDash (D \subseteq A) \wedge (D \doteq A^\circ) \to (\forall x (x \in A \to \forall B (B \in N_x \to B \cap D \neq \varnothing)) \to A \in \mathscr{T}_S)$

证明 $[\forall x (x \in A \to \forall B (B \in N_x \to B \cap D \neq \varnothing)) \to A \in \mathscr{T}_S] = [A \subseteq \bar{D}] \propto [A \in \mathscr{T}_S] = [A \subseteq \bar{D} \propto \sup\limits_{D' \subseteq A} (\mathscr{T}(D') \wedge [A \subseteq \bar{D}'])\geqslant [A \subseteq \bar{D}] \propto ([D \subseteq A] \wedge \mathscr{T}(D) \wedge [A \subseteq \bar{D}]) \geqslant [D \subseteq A] \wedge \mathscr{T}(D) \geqslant [D \subseteq A] \wedge [D \doteq A^\circ]$. □

8.5 **定理** 对任意的 $A \subseteq X$,

$\vDash (\exists B)((B \subseteq A) \wedge (B \in \mathscr{T}_S) \mathbin{\dot\wedge} (A \subseteq \bar{B})) \to A \in \mathscr{T}_S$.

证明

$$[\exists B((B \subseteq A) \wedge (B \in \mathscr{T}_S) \mathbin{\dot\wedge} (A \subseteq \bar{B}))]$$

$$= \sup_{B \subseteq A} ([B \in \mathscr{T}_S] \mathbin{\dot\wedge} [A \subseteq \bar{B}]).$$

$$= \sup_{B \subseteq A} (\sup_{D \subseteq B} (\mathscr{T}(D) \wedge [B \subseteq \bar{D}]) \mathbin{\dot\wedge} [A \subseteq \bar{B}])$$

$$\leqslant \sup_{B \subseteq A} \sup_{D \subseteq B} (\mathscr{T}(D) \wedge [B \subseteq \bar{D}]) \mathbin{\dot\wedge} [A \subseteq \bar{B}])$$

$$\leqslant \sup_{B \subseteq A} \sup_{D \subseteq B} ((\mathscr{T}(D) \wedge ([A \subseteq \bar{B}] \mathbin{\dot\wedge} [\bar{B} \subseteq \bar{D}]))$$

$$\leqslant \sup_{D \subseteq A} (\mathscr{T}(D) \wedge [A \subseteq \bar{D}]) = [A \in \mathscr{T}_S].\ \square$$

8.6 **定理** 对任意 A、$B \subseteq X$, $x \in X$,

$\vDash A \in \mathscr{T}_S \leftrightarrow (\exists B)((B \in \mathscr{T}) \wedge (B \subseteq A) \wedge (\forall x)(x \in A \to (\exists S)((S \subseteq B) \wedge (S \triangleright x))))$

证明 由§5 5.2 定理(2),我们得到

$[(\exists B)((B \in \mathscr{T}) \wedge (B \subseteq A) \wedge (\forall x)(x \in A \to (\exists S)((S \subseteq B) \wedge (S \triangleright x))))]$

$$= \sup_{B \subseteq A} (\mathscr{T}(B) \wedge \inf_{x \in A} [(\exists S)((S \subseteq B) \wedge (S \triangleright x))]$$

$$= \sup_{B \subseteq A} (\mathscr{T}(B) \wedge \inf_{x \in A} B^-(x)) = \mathscr{T}_S(A).\ \square$$

8.7 **定理** 对任意 $A \subseteq X$

$\vDash (\exists B)((B\subseteq A)\wedge(B\in\mathscr{T}_S)\wedge(\forall x)(x\in A\to(\exists S)((S \subseteq B)\wedge(S\triangleright x))))\to A\in\mathscr{T}_S$

证明 据定理1.5,上式显然是恒真的.□

8.8 **定理** 对任意$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\mathscr{P}(X)$

$\vDash \forall\lambda(\lambda\in\Lambda\to A_\lambda\in\mathscr{T}_S)\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\mathscr{T}_S$

证明 由于对任意的$\lambda\in\Lambda$, $B_\lambda\subseteq A_\lambda$ 可导出

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,从而有

$$\begin{aligned}
\wedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}_S(A_\lambda) &= \wedge_{\lambda\in\Lambda}\sup_{B_\lambda\subseteq A_\lambda}(\mathscr{T}(B_\lambda)\wedge\inf_{x\in A_\lambda}B_\lambda^-(x))\\
&\leqslant \sup_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(\wedge_{\lambda\in\Lambda}(\mathscr{T}(B_\lambda)\wedge\inf_{x\in A_\lambda}B_\lambda^-(x)))\\
&= \sup_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(\wedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}(B_\lambda)\wedge\wedge_{\lambda\in\Lambda}\inf_{x\in A_\lambda}B_\lambda^-(x))\\
&\leqslant \sup_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(\mathscr{T}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)\wedge\inf_{x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}B_\lambda^-(x))\\
&\leqslant \sup_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(\mathscr{T}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)\wedge\inf_{x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)^-(x))\\
&=\mathscr{T}_S(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda).\ \square
\end{aligned}$$

8.9 **定理** 设$(Y,\mathscr{U})$是$(X,\mathscr{T})$的子空间,对任意 $A\subseteq Y$,

$\vDash A\in\mathscr{T}_X^S\to A\in\mathscr{T}_Y^S$

其中 $\mathscr{T}_X^S$ 和 $\mathscr{T}_Y^S$ 分别X 和 Y 中的 $\mathscr{T}$ 半开集族和 $\mathscr{U}$ 半开集族。

证明

$$\begin{aligned}
[A\in\mathscr{T}_X^S] &= \sup_{B\subseteq A}(\mathscr{T}_X(B)\wedge\inf_{x\in A}Cl_XB(x))\\
&= \sup_{B\subseteq A}([(B\in\mathscr{T}_X)\wedge(B=B\cap Y)]\wedge\inf_{x\in A}Cl_XB(x)\wedge\inf_{x\in A}Y(x))\\
&\leqslant \sup_{B\subseteq A}([(B\in\mathscr{T}_X)\wedge(B=B\cap Y)]\wedge\inf_{x\in A}(Cl_X(B\cap Y)(x))\\
&\leqslant \sup_{B\subseteq A}(\mathscr{T}_Y(B)\wedge\inf_{x\in A}Cl_YB(x)=\mathscr{T}_Y^S(\mathrm{A}).\ \square
\end{aligned}$$

8.10 **定理** 设$(\mathrm{X},\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间,A

$\subseteq X, f\in Y^X$，则

$$C(f)\wedge O(f)\vDash A\in\mathscr{T}_S\rightarrow f(A)\in\mathscr{U}_S$$

其中 $O(f):=(\forall u)(u\in\mathscr{T})\rightarrow(f(u)\in\mathscr{U}))$（见第三章 1.3 定义）。

证明

$$\begin{aligned}[A\in\mathscr{T}_S] &= \sup_{B\subseteq A}(\mathscr{T}(B)\wedge\inf_{x\in A}B^-(x))\\ &\leqslant \sup_{f(B)\subseteq f(A)}(\mathscr{U}(f(B))\wedge\inf_{y\in f(A)}f(B^-)(y))\\ &\leqslant \sup_{f(B)\subseteq f(A)}(\mathscr{U}(f(B))\wedge\inf_{y\in f(A)}\overline{f(B)}(y))\\ &= [f(A)\in\mathscr{U}_S].\ \square\end{aligned}$$

8.11 **定义** 设 $x\in X, N_x^S\in\mathscr{T}(\mathscr{P}(X))$ 表示 x 的半领域系，定义为：

$$A\in N_x^S:=\exists B((B\in\mathscr{T}_S)\wedge(x\in B\subseteq A))$$

即：$N_x^S=\int_{\mathscr{P}(X)}\sup_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}_S(B)/A$

8.12 **引理** $\inf_{x\in A}\sup_{x\in B\subseteq A}\mathscr{T}_S(B)=\mathscr{T}_S(A)$

证明 证明完全类似于§1 1.5 引理，略。

8.13 **定理** 对任意 x、A，

$$\vDash(A\in\mathscr{T}_S)\leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow\exists B((B\in N_x^S)\wedge(B\subseteq A)))$$

8.14 **定义** 设 X 是一个不分明化拓扑空间，一元不分明谓词 $\mathscr{F}_S\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，称为不分明半闭集，定义为：

$$A\in\mathscr{F}_S:=A^C\in\mathscr{T}_S$$

即：$\mathscr{F}_S=\int_{\mathscr{P}(X)}\mathscr{T}_S(A^C)/A$

接下来我们从半开集出发给出半连续函数的概念。

8.15 **定义** 设 $(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$ 是两个不分明化拓扑空间，一元不分明谓词 $C_S\in\mathscr{F}(Y^X)$ 称为不分明半连续的，定义为：

$$C_S(f):=(\forall u)((u\in\mathscr{U})\rightarrow(f^{-1}(u)\in\mathscr{T}_S))$$

即 f 是半连续的程度为$[C_S(f)]=\inf\limits_{U\subseteq Y}\min(1.1-\mathscr{U}(u)+\mathscr{T}_S(f^{-1}(u)))$.

8.16 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间,对任意的 $f\in Y^X$,令

(1)$\alpha_1(f)=(\forall F)((F\in\mathscr{F}_Y)\rightarrow(f^{-1}(F)\in\mathscr{F}_X^S))$

(2)$\alpha_2(f)=(\forall x)(\forall u)((u\in N_{f(x)})\rightarrow(f^{-1}(U)\in N_x^S))$

(3)$\alpha_3(f)=(\forall x)(\forall u)((u\in N_{f(x)})\rightarrow(\exists V)((V\in N_x^S)\rightarrow(f(v)\subseteq u)))$

(4)$\alpha_4(f)=(\forall x)(\forall u)((f(x)\in u\in\mathscr{U})\rightarrow(\exists V)((V\in\mathscr{T}_S)\wedge(x\in V)\rightarrow(f(v)\subseteq u)))$.

则$\vDash C_S(f)\leftrightarrow\alpha_i(f),i=1,2,3,4$

证明 (a)首先我们证明$[C_S(f)]=[\alpha_1(f)]$

$$\begin{aligned}[\alpha_1(f)]&=\inf_{F\in\mathscr{P}(Y)}\min(1.1-\mathscr{F}_Y(F)+\mathscr{F}_X^S(f^{-1}(F)))\\&=\inf_{F\in\mathscr{P}(Y)}\min(1.1-\mathscr{U}(Y\sim F)+\mathscr{T}_S(X\sim f^{-1}(F)))\\&=\inf_{F\in\mathscr{P}(Y)}\min(1.1-\mathscr{U}(Y\sim F)+\mathscr{T}_S(f^{-1}(X\sim F))).\\&=\inf_{U\in\mathscr{P}(Y)}\min(1.1-\mathscr{U}(U)+\mathscr{T}_S(f^{-1}(U)))=[C_S(f)].\end{aligned}$$

(b)现在来证明$[C_S(f)]\leqslant[\alpha_2(f)]$,因为

$$[\alpha_2(f)]=\inf_{x\in X}\inf_{U\in\mathscr{P}(Y)}\min(1.1-N_{f(x)}(U)+N_x^S(f^{-1}(U)))$$

所以只须证明对任意的$x\in X$ 和$U\in\mathscr{P}(Y)$,有

$$\min(1.1-N_{f(x)}(U)+N_x^S(f^{-1}(U)))\geqslant[C_S(f)].$$

如果 $N_{f(x)}(U)\leqslant N_x^S(f^{-1}(U))$,则欲证显然成立。现假设 $N_{f(x)}(U)>N_x^S(f^{-1}(U))$,则由于 $f(x)\in A\subseteq U$ 必有$x\in f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(U)$,因此,

$$\begin{aligned}&N_{f(x)}(U)-N_x^S(f^{-1}(U))\\&=\sup_{f(x)\in A\subseteq U}\mathscr{U}(A)-\sup_{x\in B\subseteq f^{-1}(U)}\mathscr{T}_S(B)\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{f(x)\in A\subseteq U} \mathscr{U}(A) - \sup_{f(x)\in A\subseteq U} \mathscr{T}_S(f^{-1}(A)))$$

$$\leqslant \sup_{f(x)\in A\subseteq U} (\mathscr{U}(A) - \mathscr{T}_S(f^{-1}(A)))$$

故而

$$\min(1.1 - N_{f(x)}(U) + N_x^S(f^{-1}(U)))$$

$$\geqslant \inf_{f(x)\in A\subseteq U} \min(1.1 - \mathscr{U}(A) + \mathscr{T}_S(f^{-1}(A)))$$

$$\geqslant \inf_{V\in\mathscr{R}(Y)} \min(1.1 - \mathscr{U}(V) + \mathscr{T}_S(f^{-1}(V))) = [C_S(f)].$$

(c)我们证明$[\alpha_2(f)] = [\alpha_3(f)]$，注意到$ff^{-1}(u)\subseteq u$，故

$$[\alpha_3(f)] = \inf_{x\in X} \inf_{U\in\mathscr{R}(Y)} \min(1.1 - N_{f(x)}(u) + \sup_{V\in\mathscr{R}(X), f(V)\subseteq U} N_x^S(V))$$

$$\geqslant \inf_{x\in X} \inf_{U\in\mathscr{R}(Y)} \min(1.1 - N_{f(x)}(u) + N_x^S(f^{-1}(U)))$$

$$= [\alpha_2(f)].$$

再注意到当$f(V)\subseteq U$时$V\subseteq f^{-1}(U)$，$N_x^S(V)\subseteq N_x^S(f^{-1}(U))$，因此反向不等式也是成立的。

(d)证明$[\alpha_3(f)]\leqslant[\alpha_4(f)]$. 由于$N_{f(x)}(U) = \sup_{f(x)\in B\subseteq U} \mathscr{U}(B) \geqslant [f(x)\in U\in\mathscr{U}]$及$N_x^S(V) = \sup_{x\in D\subseteq V} \mathscr{T}_S(D) \geqslant [x\in V\in\mathscr{T}_S]$，则显然有

$$[\alpha_3(f)] = \inf_{x\in X} \inf_{U\in\mathscr{R}(Y)} \min(1.1 - N_{f(x)}(U) + \sup_{V\in\mathscr{R}(X)} \min(1.1 - N_x^S(V) + \inf_{y\in f(V)} U(y)) \leqslant \inf_{x\in X} \inf_{U\in\mathscr{R}(Y)} \min(1.1 - (U(f(x)) \wedge \mathscr{U}(U)) + \sup_{V\in\mathscr{R}(X)} \min(1.1\text{-}(V(x) \wedge \mathscr{T}_S(V) + \inf_{y\in f(V)} U(y))) = [\alpha_4(f)].$$

$c)$最后，证明$\vdash \alpha_4(f) \to C_S(f)$。实际上，对于任意$x\in f^{-1}(U)$，有$f(x)\in U$，因此

$$[\alpha_4(f)] = \inf_{x\in X} \inf_{U\in\mathscr{R}(Y)} \min(1.1 - [f(x)\in U\in\mathscr{U}] + \sup_{x\in v, f(v)\subseteq u} \mathscr{T}_S(V))$$

$$\leqslant \inf_{x\in f^{-1}(U)} \inf_{U\in\mathscr{R}(Y)} \min(1.1 - \mathscr{U}(U) + \sup_{x\in v\subseteq f^{-1}(U)} \mathscr{T}_S(V))$$

$$= \inf_{U\in\mathscr{R}(Y)} \min(1.1 - \mathscr{U}(U) + \inf_{x\in f^{-1}(U)} \sup_{x\in v\subseteq f^{-1}(U)} \mathscr{T}_S(V))$$

$$= \inf_{U \in \mathscr{A}(Y)} \min(1,1 - \mathscr{U}(U) + \mathscr{T}_S(\bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V))$$

$$= \inf_{U \in \mathscr{A}(Y)} \min(1,1 - \mathscr{U}(U) + \mathscr{T}_S(f^{-1}(U)) = [C_S(f)]. \square$$

§9 θ—闭包和 θ—连续函数

本节中，我们介绍不分明化拓扑中 θ—闭包的概念，进而讨论 θ—开集和 θ—连续函数的性质。

9.1 **定义** 对于任意 $A \subseteq X$，A 的不分明化 θ—闭包记做 $Cl_\theta A$，定义为：

$$x \in Cl_\theta A : (\forall B)(B \in N_x \to \neg (A \cap \overline{B} \equiv \emptyset))$$

即 x 属于 A 的 θ—闭包的程度为：

$$Cl_\theta A(x) = \inf_{B \in \mathscr{A}(X)} \min(1,1 - N_x(B) + \sup_{y \in A} \overline{B}(y))$$

9.2 **定理** 对于任意 x, A

$$\vDash x \in \overline{A} \to x \in Cl_\theta A$$

证明

$$\overline{A}(x) = \inf_{B \in \mathscr{A}(X)} \min(1,1 - N_x(B) + \sup_{y \in A} B(y)$$

$$\leqslant \inf_{B \in \mathscr{A}(X)} \min(1,1 - N_x(B) + \sup_{y \in A} \overline{B}(y))$$

$$= Cl_\theta A(x). \square$$

9.3 **定理** 对于任意 A、$B \subseteq X$，

(1) $\vDash (A \subseteq B) \to (Cl_\theta A \subseteq Cl_\theta B)$

(2) $\vDash Cl_\theta(A \cup B) \equiv Cl_\theta A \cup Cl_\theta B$.

证明 (1)注意到 $[a \to b] = [a] \propto [b] = \min(1,1 - [a] + [b])$ 及公式 $([a] \propto [b]) \propto ([a] \propto [c]) \geqslant [b] \propto [c]$，则对于 $A \subseteq B$，

$$[Cl_\theta A \subseteq Cl_\theta B] = \inf_{x \in X} (Cl_\theta A(x) \propto Cl_\theta B(x))$$

$$= \inf_{x \in X} (\inf_{C \in \mathscr{A}(X)} (N_x(C) \propto \sup_{y \in A} \overline{C}(y)) \propto \inf_{D \in \mathscr{A}(X)} (N_x(D) \propto \sup_{y \in B} \overline{D}(y)))$$

$$\geqslant \inf_{x\in X}\inf_{c\in \mathscr{P}(X)}(N_x(C)\propto \sup_{y\in A}\overline{C}(y))\propto (N_x(C)\propto \sup_{y\in B}\overline{C}(y)))$$

$$\geqslant \inf_{x\in X}\inf_{c\in \mathscr{P}(X)}(\sup_{y\in A}\overline{C}(y)\propto \sup_{y\in B}\overline{C}(y))$$

$= 1.$ □

(2)假若 A、$B\in \mathscr{P}(X)$，则对任意 $x\in X$，

$$Cl_\theta(A\cup B)(x)=\inf_{D\in \mathscr{P}(X)}\min(1.1-N_x(D)+\sup_{y\in A\cup B)}\overline{D}(y))$$

$$=\inf_{D\in \mathscr{P}(X)}\min(1.1-N_x(D)+(\sup_{y\in A}\overline{D}(y)\vee \sup_{y\in B}\overline{D}(y)))$$

$$=\inf_{D\in \mathscr{P}(X)}\min(1.1-N_x(D)+\sup_{y\in A}\overline{D}(y))\vee \inf_{D\in \mathscr{P}(X)}\min(1.1-N_x(D)$$

$$+\sup_{y\in B}\overline{D}(y))$$

$$=Cl_\theta A(x)\vee Cl_\theta B(x)$$

$$=(Cl_\theta A\cup Cl_\theta B)(x).$$ □

9.4 **定义** 设Σ是不分明化拓扑空间类，一元不分明谓词 $\mathscr{F}_\theta\in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，称为不分明 θ—闭的，定义为：

$$A\in \mathscr{F}_\theta := A\equiv Cl_\theta A.$$

即 $\mathscr{F}_\theta=\int_{\mathscr{P}(X)}\inf_{x\in X-A}(1-Cl_\theta A(x))/A.$

一元不分明谓词 $\mathscr{T}_\theta\in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$称为不分明 θ—开的，定义为

$$A\in \mathscr{T}_\theta := A^C\in \mathscr{F}_\theta$$

即 $\mathscr{T}_\theta=\int_{\mathscr{P}(X)}\mathscr{F}_\theta(A^C)/A.$

对于任意 $A\subseteq X$，A 的 θ 一内点的不分明集合称为 A 的 θ—内部，记做 $Int_\theta A$，定义为

$$x\in Int_\theta A := \neg\,(x\in Cl_\theta(A^C))$$

即 $Int_\theta A=\int_X 1-Cl_\theta A^C(x)/x.$

9.5 **定理** 对任意 $A\subseteq X$，

(1) $\models A\equiv Int_\theta A\leftrightarrow A\in \mathscr{T}_\theta$;

(2) $\models A\in \mathscr{T}_\theta\rightarrow A\in \mathscr{T}$;

(3) $\models A\in \mathscr{F}_\theta\rightarrow A\in \mathscr{F}.$

证明

(1) $[A\in\mathscr{T}_\theta]=[A^C\in\mathscr{F}_\theta]=[A^C\equiv Cl_\theta A^C]$

$$=[A^C\supseteq Cl_\theta A^C]=\inf_{x\in X\setminus(X\setminus A)}(1-Cl_\theta A^C(x))$$

$$=\inf_{x\in A}Int_\theta A(x)=[A\subseteq Int_\theta A]$$

$$=\min([A\subseteq Int_\theta A]、[A\supseteq Int_\theta A])$$

$$=[A\equiv int_\theta A].$$

(2) $[A\in\mathscr{T}_\theta]=\inf_{x\in A}(1-Cl_\theta A^C(x))$

$$\leqslant\inf_{x\in A}(1-\overline{A^C}(x))$$

$$=\inf_{x\in A}(1-1+N_x(A))=\inf_{x\in A}N_x(A)$$

$$=\mathscr{T}(A)=[A\in\mathscr{T}].$$

(3)显然的．

9.6　**定理**　设$(X,\mathscr{T})$是一不分明化拓扑空间，则$\mathscr{T}_\theta\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$是$X$上的一不分明化拓扑，我们称其为关于$\mathscr{T}$的$\theta$一不分明化拓扑．

证明　明显有$\mathscr{T}_\theta(\varnothing)=\mathscr{T}_\theta(X)=1.$

对于任意$A_\lambda\in\mathscr{P}(X)(\lambda\in\Lambda)$,

$$\mathscr{T}_\theta(A_1\cap A_2)=\inf_{x\in A_1\cap A_2}(1-Cl_\theta(A_1\cap A_2)^C(x))$$

$$=\inf_{x\in A_1\cap A_2}(1-Cl_\theta(A_1^C\cup A_2^C)(x))$$

$$=\inf_{x\in A_1\cap A_2}(1-(Cl_\theta A_1^C(x)\vee Cl_\theta A_2^C(x)))$$

$$=\inf_{x\in A_1\cap A_2}(1-Cl_\theta A_1^C(x))\wedge(1-Cl_\theta A_2^C(x)))$$

$$\geqslant\inf_{x\in A_1}(1-Cl_\theta(A_1^C(x))\wedge\inf_{x\in A_2}(1-Cl_\theta A_2^C(x))$$

$$=\mathscr{T}_\theta(A_1)\wedge\mathscr{T}_\theta(A_2)$$

$$\mathscr{T}_\theta(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\mathscr{F}_\theta(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C)$$

$$=[Cl_\theta(\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C)\equiv\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C]$$

$=[(Cl_\theta(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C)\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C)\wedge(Cl_\theta(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C)\supseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C)]$

$=[Cl_\theta(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C)\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C]$

$\geqslant[(Cl_\theta(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C)\subseteq\bigcap_{\lambda\in\Lambda}Cl_\theta(A_\lambda^C))\wedge(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}Cl_\theta(A_\lambda^C)\equiv\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C]$

$=[\bigcap_{\lambda\in\Lambda}Cl_\theta(A_\lambda^C)\equiv\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C]$

$\geqslant\inf_{\lambda\in\Lambda}[Cl_\theta(A_\lambda^C)\equiv A_\lambda^C]$

$=\inf_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\theta(A_\lambda^C)=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}_\theta(A_\lambda)$. □

9.7 **定义** 设 $x\in X$，x 的 θ—邻域系记做 $N_x^\theta\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 定义为

$A\in N_x^\theta:=\exists B((B\in N_x)\wedge(\overline{B}\subseteq A))$

9.8 **定理** 对于任意 $A\in\mathscr{P}(X)$

$\vdash A\in\mathscr{T}_\theta\leftrightarrow\forall x(x\in A\to A\in N_x^\theta)$

证明

$[A\in\mathscr{T}_\theta]=\inf_{x\in A}(1-Cl_\theta A^C(x))$

$=\inf_{x\in A}(1-\inf_B\min(1.1-N_x(B)+\sup_{y\in A^C}\overline{B}(y)))$

$=\inf_{x\in A}\sup_B\max(0.N_x(B)-\sup_{y\in A^C}\overline{B}(y))$

$=\inf_{x\in A}\sup_B\max(0.N_x(B)+\inf_{y\in A^C}(1-\overline{B}(y))-1)$

$=\inf_{x\in A}\sup_B(N_x(B)\otimes\inf_{y\in A^C}(1-\overline{B}(y)))$

$[(\forall x)(x\in A\to(\exists B)((B\in N_x)\wedge(\overline{B}\subseteq A)))]$

$=[\forall x(x\in A\to A\in N_x^\theta)]$. □

9.9 **定理** $Cl_\theta A=\int_X 1-N_x^\theta(A^C)/x$，

证明

$Cl_\theta A(x)=\inf_B\min(1.1-N_x(B)+\sup_{y\in A}\overline{B}(y))$

$$=1-\sup_B \max(0.\ N_x(B)+\sup_{y\in A}\overline{B}(y))$$

$$=1-\sup_B \max(0.\ N_x(B)+\inf_{y\in A}(1-\overline{B}(y))-1)$$

$$=1-[(\exists B)((B\in N_x)\wedge(\overline{B}\subseteq A^C))]=1-N_x^{\theta}(A^C).\square$$

9.10 **定理** 对于任意 $A\subseteq X$,

$\vdash A\in\mathscr{T}\to(Cl_{\theta}A\equiv\overline{A})$

证明 首先证明 $\vdash A\in\mathscr{T}\to(\neg(A\cap\overline{B}\equiv\varnothing)\to\neg((A\cap B)\equiv\varnothing))$ 事实上, $\mathscr{T}(A)\otimes[\neg(A\cap\overline{B}\equiv\varnothing)]$

$$=\max(0,\mathscr{T}(A)+[\neg(A\cap\overline{B}\equiv\varnothing)]-1)$$

$$=\max(0,\inf_{x\in A}N_x(A)+\sup_{y\in A}\overline{B}(y)-1)$$

$$=\max(0,\sup_{y\in A}\overline{B}(y)-\sup_{x\in A}(1-N_x(A)))$$

$$=\max(0,\sup_{x\in A}(\overline{B}(x)-1+N_x(A)))$$

$$=\max(0,\sup_{x\in A}((B\cup B')(x)-1+N_x(A)))$$

$$=\max(0,\sup_{x\in A}(\max(B(x)\quad B'(x))-1+N_x(A)))(*)$$

若 $x\in B$, 则

$$(*)=\max(0,\sup_{x\in A}(B(x)-1+N_x(A)))$$

$$\leqslant\sup_{x\in A}B(x)=[\neg(A\cap B\equiv\varnothing)].$$

若 $x\notin B$, 则

$$(*)=\max(0,\sup_{x\in A}(B'(x)-1+N_x(A)))$$

$$=\max(0\ \sup_{x\in A}(\inf_C\min(1,1-N_x(C)+\sup_{y\in C}(B-\{x\}(y))-1+N_x(A)))$$

$$\leqslant\max(0,\sup_{x\in A}(1-N_x(A)+\sup_{y\in A}(B-\{x\})(y)-1+N_x(A)))$$

$$=\sup_{y\in A}(B-\{x\})(y)=\sup_{y\in A}B(y)=[\neg(A\cap B\equiv\varnothing)]$$

于是, $[\neg(A\cap\overline{B}\equiv\varnothing)]\propto[\neg(A\cap B\equiv\varnothing)]\geqslant\mathscr{T}(A)$

因此，$[Cl_\theta A\equiv\bar{A}]=[Cl_\theta A\subseteq\bar{A}]=\inf_{x\in X}(Cl_\theta A(x)\propto\bar{A}(x))$

$=\inf_{x\in X}(\inf_{B\in\mathscr{N}(X)}(N_x(B)\propto\sup_{y\in A}\bar{B}(y))\propto\inf_{c\in\mathscr{N}(X)(}(N_x(C)\propto\sup_{y\in A}B(y)))$

$\geqslant\inf_{x\in X}\inf_{B\in\mathscr{N}(X)}((N_x(B)\propto\sup_{y\in A}\bar{B}(y))\propto(N_x(B)\propto\sup_{y\in A}B(y)))$

$\geqslant\inf_{x\in X}\inf_{B\in\mathscr{N}(X)}(\sup_{y\in A}\bar{B}(y)\propto\sup_{y\in A}B(y))$

$\geqslant\inf_{x\in X}\inf_{B\in\mathscr{N}(X)}\mathscr{T}(A)=\mathscr{T}(A)$. □

9.11 **推论** 对于任意 $A\subseteq X$,

$\vdash A\in\mathscr{F}_\theta\to(Cl_\theta A\equiv\bar{A})$

9.12 **定义** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间，二元不分明谓词 $C_{s\theta}$、$C_\theta\in\mathscr{F}(Y^X)$分别称为强 θ—连续和 θ—连续的，定义为

$C_{s\theta}(f):=(\forall x)(\forall u)(U\in N^Y_{f(x)}\to(\exists V)((V\in N^X_x)\wedge(f(\bar{V})\subseteq U)))$

$C_\theta(f):=(\forall x)(\forall u)(U\in N^Y_{f(x)}\to(\exists V)((V\in N^X_x)\wedge(f(\bar{V})\subseteq\bar{U})))$.

即 f 是强θ—连续函数和 θ—连续函数的程度分别为：

$[C_{s\theta}(f)]=\inf_{x\in X}\inf_{U\subseteq Y}\min(1,1-N^Y_{f(x)}(U)+\sup_{V\subseteq X}\max(0,N^X_x(V)+[f(\bar{V})\subseteq U]-1))$和$[C_\theta(f)]=\inf_{x\in X}\inf_{U\subseteq Y}\min(1,1-N^Y_{f(x)}(u)+\sup_{V\subseteq X}\max(0,N^X_x(v)+[f(\bar{v})\subseteq\bar{u}]-1))$

9.13 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间，对于任意 $f\in Y^X$，令

(1)$\alpha_1(f)=(\forall A)(f(Cl_\theta A)\subseteq\overline{f(A)})$.

(2)$\alpha_2(f)=(\forall B)(Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\bar{B}))$.

(3)$\alpha_3(f)=(\forall B)((B\in\mathscr{F}_Y)\to(f^{-1}(B)\in\mathscr{F}^X_\theta))$.

(4)$\alpha_4(f)==(\forall u)((u\in\mathscr{U})\to(f^{-1}(u)\in\mathscr{T}^X_\theta))$.

则$\vdash C_{s\theta}(f)\leftrightarrow\alpha_i(f)$, $i=1,2,3,4$

证明

(a)首先，证明$[C_{s\theta}(f)]\leqslant[\alpha_1(f)]$

因为$[\alpha_1(f)]=\inf\limits_{A\in\mathscr{P}(X)}\inf\limits_{y\in Y}\min(1,1-f(Cl_\theta A)(y)+\overline{f(A)}(y))$，故只需证明对任何$A\in\mathscr{P}(X)$和$y\in Y$，

$$\min(1,1-f(Cl_\theta A)(y)+\overline{f(A)}(y))\geqslant[C_{s\theta}(f)]$$

若$f(Cl_\theta A)(y)\leqslant\overline{f(A)}(y)$，则是显然的，现假设$f(Cl_\theta A)(y)>\overline{f(A)}(y)$. 事实上，$[\neg(\overline{B}\cap A\equiv\emptyset)]\leqslant[\neg(f(\overline{B})\cap f(A)\equiv\emptyset)]$. 因此

$$f(Cl_\theta A)(y)-\overline{f(A)}(y)$$

$$=\sup_{f(x)=y}\inf_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-N_x(B)+\sup_{z\in A}\overline{B}(z))-(1-N_y((f(A))^C))$$

$$\leqslant\sup_x\inf_B\min(1,1-N_x(B)+\sup_{z\in f(A)}f(\overline{B})(z))-1+N_{f(x)}((f(A))^C))$$

$$=\sup_x(N_{f(x)}((f(A))^C)-\sup_B\max(0,N_x(B)-\sup_{z\in f(A)}f(\overline{B})(z)))$$

$$=\sup_x(N_{f(x)}((f(A))^C)-\sup_B\max(0,N_x(B)+\inf_{z\in f(A)}(1-f(\overline{B})(z))-1))$$

$$=\sup_x(N_{f(x)}((f(A))^C)-\sup_B\max(0,N_x(B)+[f(\overline{B})\subseteq((f(A))^C)]-1))$$

$$\leqslant\sup_x\sup_u(N_{f(x)}(U)-\sup_B\max(0,N_x(B)+[f(\overline{B})\subseteq U]-1))$$

所以$\min(1,1-f(Cl_\theta A)(y)+\overline{f(A)}(y))\geqslant\inf\limits_x\inf\limits_u\min(1,1-N_{f(x)}(u)+\sup\limits_B\max(0,N_x(B)+[f(\overline{B})\subseteq U]-1))=[C_{s\theta}(f)]$.

(b)现证明$[\alpha_1(f)]\leqslant[\alpha_2(f)]$，对于任意$B\in\mathscr{P}(Y)$，由$f(Cl_\theta f^{-1}(B))\supseteq Cl_\theta f^{-1}(B)$，$ff^{-1}(B)\subseteq B$，$\overline{ff^{-1}(B)}\subseteq\overline{B}$，$\overline{f^{-1}(ff^{-1}(B))}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$，我们有

$[Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\overline{B})]\geqslant[f^{-1}f(Cl_\theta f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(\overline{B})]\geqslant[f^{-1}f(Cl_\theta f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}\overline{(ff^{-1}(B))}]\geqslant[f(Cl_\theta f^{-1}(B))\subseteq$

$\overline{ff^{-1}(B)}]$. 因此,

$$[\alpha_2(f)]=\inf_{B\in\mathscr{P}(Y)}[Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\bar{B})]\geqslant\inf_{B\in\mathscr{P}(Y)}[f(Cl_\theta f^{-1}(B))\subseteq\overline{ff^{-1}(B)}]\geqslant\inf_{A\in\mathscr{P}(X)}[f(Cl_\theta A)\subseteq\overline{f(A)}]=[\alpha_1(f)]$$

(c)我们往证$[\alpha_2(f)]\leqslant[\alpha_3(f)]$, 事实上对任意 $B\in\mathscr{P}(Y)$,
$[Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\bar{B})]\otimes\mathscr{F}_Y(B)=\inf_{x\in X}(1.1-Cl_\theta f^{-1}(B)(x)+f^{-1}(\bar{B})(x))\otimes\mathscr{F}_Y(B)=\inf_{x\in X}\min(\mathscr{F}_Y(B)\max(0.\mathscr{F}_Y(B)+f^{-1}(\bar{B})(x)-Cl_\theta f^{-1}(B)(x)))$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_Y(B)+f^{-1}(\bar{B}(x)-1&=[\bar{B}\subseteq B]+f^{-1}(\bar{B})(x)-1\\&\leqslant[f^{-1}(\bar{B})\subseteq f^{-1}(B)]+f^{-1}(\bar{B})(x)-1\\&=\inf_x\min(1.1-f^{-1}(\bar{B})(x)+f^{-1}(B)(x))+f^{-1}(\bar{B})(x)-1\\&\leqslant\min(f^{-1}(\bar{B})(x),f^{-1}(B)(x)\\&\leqslant f^{-1}(B)(x)\end{aligned}$$

$[Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\bar{B})]\otimes\mathscr{F}_Y(B)\leqslant\inf_{x\in X}\min(1,1-Cl_\theta f^{-1}(B)(x)+f^{-1}(B)(x))$
$=[Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(B)]=[f^{-1}(B)\in\mathscr{F}_\theta]$
$[Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\bar{B})]\leqslant(\mathscr{F}_Y(B)\propto[f^{-1}(B)\in\mathscr{F}_\theta])$
因此

$$\begin{aligned}[\alpha_2(f)]&=[(\forall B)(Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\bar{B})]\\&\leqslant[(\forall B)((B\in\mathscr{F}_Y)\to(f^{-1}(B)\in\mathscr{F}_\theta^X))]\\&=[\alpha_3(f)]\end{aligned}$$

(d)我们证明$[\alpha_3(f)]=[\alpha_4(f)]$

$$\begin{aligned}[\alpha_3(f)]&=\inf_{B\in\mathscr{P}(Y)}\min(1.1-\mathscr{F}_Y(B)+\mathscr{F}_\theta^X(f^{-1}(B)))\\&=\inf_{B\in\mathscr{P}(Y)}\min(1.1-\mathscr{U}(Y\sim B)+\mathscr{T}_\theta(X\sim f^{-1}(B)))\\&=\inf_{B\in\mathscr{P}(Y)}\min(1.1-\mathscr{U}(Y\sim B)+\mathscr{T}_\theta(f^{-1}(Y\sim B)))\end{aligned}$$

$$= \inf_{U \in \mathscr{P}(Y)} \min(1.1 - \mathscr{U}(U) + \mathscr{T}_\theta(f^{-1}(U)))$$
$$= [\alpha_4(f)]$$

(e)最后证明$\vdash \alpha_4(f) \rightarrow C_{\mathscr{B}}(f)$. 因为

$$[C_{\mathscr{B}}(f)] = \inf_x \inf_{u \in \mathscr{P}(Y)} \min(1.1 - N^Y_{f(x)}(u) + \sup_{V \in \mathscr{P}(X)} \max(0. N_x(V) + [f(\bar{v}) \subseteq u] - 1)),$$

故只需证明对任意 $x \in X$ 和 $u \in \mathscr{P}(Y)$,

$$\min(1.1 - N^Y_{f(x)}(u) + \sup_v \max(0. N_x(v) + [f(\bar{v}) \subseteq u] - 1)) \geqslant [\alpha_4(f)].$$

若 $N^Y_{f(x)}(u) \leqslant \sup_v \max(0. N_x(v) + [f(\bar{v}) \subseteq u] - 1$,则是显然的。现假设 $N^Y_{f(x)}(u) > \sup_v \max(0. N_x(v) + [f(\bar{v}) \subseteq u] - 1)$。事实上,由 $\bar{v} \subseteq f^{-1}(u)$推出 $f(\bar{v}) \subseteq u$,可得

$$N^Y_{f(x)}(u) - \sup_v \max(0. N_x(v) + [f(\bar{v}) \subseteq u] - 1)$$
$$\leqslant N^Y_{f(x)}(u) - \sup_v \max(0. N_x(v) + [\bar{v} \subseteq f^{-1}(u)] - 1)$$
$$= N^Y_{f(x)}(u) - \sup_v \max(0. N_x(v) + \inf_{z \in f^{-1}(v))^C} (1 - \bar{v}(z)) - 1)$$
$$= \sup_{f(x) \in A \subseteq u} \mathscr{U}(A) - \sup_v \max(0. N_x(v) - \sup_{z \in f^{-1}} (u^C) \bar{v}(z))$$
$$\leqslant \sup_{f(x) \in A \subseteq u} (\mathscr{U}(A) - \sup_v \max(0. N_x(v) - \sup_{z \in f^{-1}(A^C)} \bar{V}(z)))$$
$$= \sup_{f(x) \in A \subseteq u} (\mathscr{U}(A) - (1 - \inf_v \min(1.1 - N_x(v) + \sup_{z \in f^{-1}(A^C)} \bar{v}(z))))$$
$$= \sup_{f(x) \in A \subseteq u} (\mathscr{U}(A) - (1 - Cl_\theta f^{-1}(A^C)(x)))$$
$$\leqslant \sup_{f(x) \in A \subseteq u} (\mathscr{U}(A) - \inf_{x \in f^{-1}(A)} (1 - Cl_\theta f^{-1}(A^C)(x)))$$
$$= \sup_{f(x) \in A \subseteq u} (\mathscr{U}(A) - \mathscr{T}_\theta(f^{-1}(A)))$$

$$\min(1.1 - N_{f(x)}(u) + \sup_v \max(0. N_x(v) + [f(\bar{v}) \subseteq u] - 1))$$
$$\geqslant \inf_{f(x) \in A \subseteq u} \min(1, 1 - \mathscr{U}(A) + \mathscr{T}_\theta(f^{-1}(A))) \geqslant \inf_B \min(1, 1 - \mathscr{U}(B) + \mathscr{T}_\theta(f^{-1}(B))) = [\alpha_4(f)]. \square$$

9.14 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间，对任意$f\in Y^X$，令

(1)$\beta_1(f)=(\forall A)(f(Cl_\theta A)\subseteq Cl_\theta f(A))$.

(2)$\beta_2(f)=(\forall B)(Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(Cl_\theta B))$.

(3)$\beta_3(f)=(\forall B)(B\in\mathscr{F}_\theta^Y\to f^{-1}(B)\in\mathscr{F}_\theta^X)$

(4)$\beta_4(f)=(\forall B)(B\in\mathscr{U}_\theta\to f^{-1}(B)\in\mathscr{T}_\theta)$.

(5)$\beta_5(f)=(\forall B)(B\in\mathscr{U}\to(Cl_\theta f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(\overline{B})))$.

则$\vDash C_\theta(f)\to\beta_i(f)$, $i=1,2,3,4,5$.

证明 首先证明$[C_\theta(f)]\leqslant[\beta_1(f)]$. 因为

$$[\beta_1(f)]=\inf_{A\in\mathscr{P}(X)}\inf_{y\in Y}\min(1.1-f(Cl_\theta A)(y)+Cl_\theta f(A)(y)),$$

故只需证明对任意$y\in Y$和$A\in\mathscr{P}(X)$,

$$\min(1.1-f(Cl_\theta A)(y)+Cl_\theta f(A)(y))\geqslant[C_\theta(f)]$$

若$f(Cl_\theta A)(y)\leqslant Cl_\theta f(A)(y)$，则不等式成立是明显的，现假设$f(Cl_\theta A)(y)>Cl_\theta f(A)(y)$. 事实上由$\neg(A\cap\overline{B}\equiv\varnothing)$推出$\neg(f(A)\cap f(\overline{B})\equiv\varnothing)$可得到

$f(Cl_\theta A)(y)-Cl_\theta f(A)(y)$

$=\sup\limits_{f(x)=y}\inf\limits_{B}\min(1.1-N_x(B)+\sup\limits_{p\in A}\overline{B}(p))-\inf\limits_{C}\min(1.1-N_y(C)+\sup\limits_{z\in f(A)}\overline{C}(z))$

$\leqslant\sup\limits_{f(x)=y}(\inf\limits_{B}\min(1.1-N_x(B)+\sup\limits_{z\in f(A)}f(\overline{B})(z))-\inf\limits_{C}\min(1.1-N_y(C)+\sup\limits_{z\in f(A)}\overline{C}(z)))$

$=\sup\limits_{f(x)=y}(\inf\limits_{B}\min(1.1-N_x(B)+\sup\limits_{z\in f(A)}f(\overline{B})(z))-(1-\sup\limits_{C}\max(0.N_y(C)-\sup\limits_{z\in f(A)}\overline{C}(z))))$

$=\sup\limits_{f(x)=y}(\sup\limits_{C}\max(0.N_y(C)-\sup\limits_{z\in f(A)}\overline{C}(z))-\sup\limits_{B}\max(0.N_X(B)-\sup\limits_{z\in f(A)}f(\overline{B})(z)))$

$\leqslant\sup\limits_{f(x)=y}\sup\limits_{C}(N_y(C)-(\sup\limits_{z\in f(A)}\overline{C}(z)+\sup\limits_{B}\max(0.N_X(B)-\sup\limits_{z\in f(A)}f(\overline{B})(z))))$

$\leqslant \sup\limits_{f(x)=y} \sup\limits_{C}(N_y(C) - \sup\limits_{B}\max(0. N_X(B) - \sup\limits_{z\in f(A)} f(\overline{B})(z) + \sup\limits_{z\in f(A)} \overline{C}(z)))$

$\leqslant \sup\limits_{f(x)=y} \sup\limits_{C}(N_y(C) - \sup\limits_{B}\max(0. N_X(B) + 1 - \sup\limits_{z\in f(A)} f(\overline{B})(z) + \overline{C}(z) - 1))$

$= \sup\limits_{f(x)=y} \sup\limits_{C}(N_y(C) - \sup\limits_{B}\max(0. N_X(B) + \inf\limits_{z\in f(A)}(1 - f(\overline{B})(z) + \overline{C}(z)) - 1))$

$\leqslant \sup\limits_{x\in X} \sup\limits_{C}(N_{f(x)}(C) - \sup\limits_{B}\max(0. N_X(B) + \inf\limits_{z}\min(1. 1 - f(\overline{B})(z) + \overline{C}(z)) - 1))$

$\min(1. 1 - f(Cl_\theta)(y) + Cl_\theta f(A)(y))$

$\geqslant \inf\limits_{x\in X} \inf\limits_{C}\min(1. 1 - N_{f(x)}(C) + \sup\limits_{B}\max(0. N_x(B) + \inf\limits_{z}\min(1. 1 - f(\overline{B})(z) + \overline{C}(z)) - 1)$

$= \inf\limits_{x\in X} \inf\limits_{C}\min(1. 1 - N_{f(x)}(C) + \sup\limits_{B}\max(0. N_x(B) + [f(\overline{B})\subseteq\overline{C}] - 1))$

$= [(\forall x)(\forall c)(C\in N_{f(x)}\to(\exists B)(B\in N_x \wedge (f(\overline{B})\subseteq\overline{C})))] = [C_\theta(f)].$

类似于 9.13 定理的证明,可以得到$\vdash \beta_1(f)\to\beta_2(f)$、$\vdash \beta_2(f)\to\beta_3(f)$和$\vdash \beta_3(f)\leftrightarrow\beta_4(f)$,最后注意到$\vdash A\in\mathscr{T}\to(Cl_\theta A\equiv\overline{A})$,$\vdash \beta_2(f)\to\beta_5(f)$的证明是平凡的 .□

9.15 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间,则对任意 $f\in Y^X$, $C(f)\vdash C_\theta(f)$.

证明 由于$[C(f)]=1$,则对任意 $U\subseteq Y$,

$[\overline{ff^{-}(U)}\subseteq\overline{U}]=1.$

因此,

$[C(f)]=[(\forall x)C_x(f)]=\inf\limits_{x}\inf\limits_{u\subseteq Y}\min(1. 1 - N^Y_{f(x)}(u) + N^X_x(f^{-1}(u)))$

$= \inf\limits_{x}\inf\limits_{u\subseteq Y}\min(1. 1 - N^Y_{f(x)}(u) + N^X_x(f^{-1}(u)) + [f$

$\overline{f^{-1}(u)}\subseteq\bar{u}]-1)$

$\leqslant\inf\limits_{x}\inf\limits_{u\subseteq Y}\min(1.1-N^{Y}_{f(x)}(u)+\sup\limits_{v}\max(0.N^{X}_{x}(v)+[f(\overline{V})\subseteq\bar{u}]-1))$

$=[(\forall x)(\forall u)(u\in N^{Y}_{f(x)}\rightarrow(\exists V)((V\in N^{X}_{x})\wedge(f(\overline{V})\subseteq\bar{u}))))$

$=[C_{\theta}(f)].\square$

§10 *Kuratowski* 十四集定理

我们在§3和§4中分别讨论了分明集的闭包和内部,而闭包和内部则为不分明集。在实际问题中又常涉及到不分明集的内部和闭包。本节将给出不分明集的内部和闭包概念,并由此将 *Kuratowski* 十四集定理推广到不分明化拓扑中。

10.1 **定义** 设 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$, $\widetilde{A}$ 的闭包 $\widetilde{A}^{-}$ 定义为

$x\in\widetilde{A}^{-}:=\forall B((B\supseteq\widetilde{A})\wedge(B\in\mathscr{F})\rightarrow x\in B)$.

即 $\widetilde{A}^{-}(x)=\inf\limits_{x\notin B}\max(\sup\limits_{y\notin B}\widetilde{A}(y),1-\mathscr{F}(B))$.

10.2 **定理** $\vdash(\forall\widetilde{A})(\widetilde{A}^{-}\equiv Cl(\widetilde{A}))$.

其中 $Cl(\widetilde{A})=\bigcup\limits_{\alpha\in[0.1]}\alpha\overline{\widetilde{A}_{\alpha}}$(见3.7定义)。

证明 对任意 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$ 及任意 $x\in X$,设

$a=\widetilde{A}^{-}(x)=\inf\limits_{x\in B^{C}}(1-\min(\mathscr{F}(B)、[B\supseteq\widetilde{A}]))$

$b=Cl(\widetilde{A})(x)=\sup\limits_{\alpha\in[0.1]}\min(\alpha.1-N_{x}((\widetilde{A}_{\alpha})^{C}))$

(1)若 $b>\lambda$,则存在 α,使得 $\alpha>\lambda$ 且 $1-N_{x}(\widetilde{A}^{C}_{\alpha})>\lambda$. 即 $N_{x}(\widetilde{A}^{C}_{\alpha})<1-\lambda$, $\sup\limits_{x\in B\subseteq\widetilde{A}^{C}_{\alpha}}\mathscr{T}(B)<1-\lambda$.

对任意 B, $x\in B\subseteq\widetilde{A}^{C}_{\alpha}$ 有 $\mathscr{T}(B)<1-\lambda$. 所以, $\mathscr{F}(B^{C})\wedge[B^{C}\supseteq\widetilde{A}]<1-\lambda$, $a=\inf\limits_{x\in B^{C}}(1-\min(\mathscr{F}(B),[B\supseteq\widetilde{A}]))>\lambda$. 因此有 $a\geqslant$

b.

(2)若 $a>\lambda$，则对任何 $B, x\in B$ 有

$\min(\mathscr{T}(B^C)、[B^C\supseteq \widetilde{A}])<1-\lambda$.

情形一　若对任何的 B，任意 $\alpha>\lambda$，均有 $x\in B\subseteq \widetilde{A}_\alpha^C$，且 $\mathscr{T}(B^C)\leqslant 1-\lambda$，则 $\sup\limits_{x\in B\subseteq A_\alpha^C}\mathscr{T}(B)\leqslant 1-\lambda$. 也即 $N_x(\widetilde{A}_\alpha^C)\leqslant 1-\lambda, 1-N_x(\widetilde{A}_\alpha^C)\geqslant\lambda$. 所以 $\alpha\wedge(1-N_x(A_\alpha^C))\geqslant\lambda$. 所以有 $b>\lambda$，故而 $b\geqslant a$.

情形二　若对任何 $\alpha>\lambda$，存在 B_0 使得 $x\in B_0\subseteq\widetilde{A}_\alpha^C$，且 $\mathscr{T}(B_0^C)>1-\lambda$，则必有$[B_0^C\supseteq\widetilde{A}]<1-\lambda$. 即

$\inf\limits_{y\in B_0}(1-\sup\limits_{\alpha\in[0.1]}\min(\alpha,\widetilde{A}_\alpha(y)))<1-\lambda$.

$\inf\limits_{y\in B_0}\min(1-\sup\limits_{\alpha>\lambda}\min(\alpha,\widetilde{A}_\alpha(y)), 1-\sup\limits_{\alpha\leqslant\lambda}\min(\alpha,\widetilde{A}_\alpha(y)))<1-\lambda$

$\inf\limits_{y\in B_0}(1-\sup\limits_{\alpha\leqslant\lambda}\min(\alpha,\widetilde{A}_\alpha(y))<1-\lambda$,　$(1-\sup\limits_{\alpha\leqslant\lambda}\alpha)<1-\lambda$

$1-\lambda<1-\lambda$ 矛盾 .

综上可知 $a=b$.

10.3　**定义**　$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$的内部 $\widetilde{A}^0$ 定义为

$x\in\widetilde{A}^0:=\exists B((x\in B)\wedge(B\subseteq\widetilde{A})\wedge(B\in\mathscr{T}))$

即 $\widetilde{A}^0(x)=\sup\limits_{x\in B}\min(\inf\limits_{y\in B}\widetilde{A}(y),\mathscr{T}(B))$.

10.3′　**定义**　设 $in:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$为 4.1 定义的扩张：$in(\widetilde{A})=\bigcup\limits_{\alpha\in[0.1]}\alpha(\widetilde{A}_\alpha)^0$.

10.4　**定理**　$\vDash\forall\widetilde{A}(\widetilde{A}^0\equiv in(\widetilde{A}))$.

证明　完全类似于 10.2 定理的证明 .

10.5　**定理**　$\vDash\forall\widetilde{A}(\widetilde{A}^{C-C}\equiv\widetilde{A}^0)$，其中 $\widetilde{A}^{C-C}=((\widetilde{A}^C)^-)^C$. 以下类似 .

证明　利用 10.1 定义和 10.3 定义直接验证 .

10.6　**定理**　10.1 定义中的闭包运算满足闭包公理，即

(1)$\varnothing^{-}=\varnothing$;

(2)$\widetilde{A}\subseteq\widetilde{A}^{-}$;

(3)$(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})^{-}=\widetilde{A}^{-}\cup\widetilde{B}^{-}$;

(4)$\widetilde{A}^{--}=\widetilde{A}^{-}$.

证明 由 3.13 定理和 10.2 定理很容易证明(1)、(2)、(3). 现证明(4). 由定义 10.1 可得到:

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^{--}(x)&=\inf_{x\notin B}\max(\sup_{y\notin B}(\inf_{y\notin C}\max(\sup_{z\notin C}A(z),1-\mathscr{F}(C))),1-\mathscr{F}(B))\\&\leqslant\inf_{x\notin B}\max(\sup_{y\notin B}\max(\sup_{z\notin B}A(z),1-\mathscr{F}(B)),1-\mathscr{F}(B)).\\&=\inf_{x\notin B}\max(\sup_{z\notin B}A(z),1-\mathscr{F}(B))=\widetilde{A}^{-}(x).\end{aligned}$$

故而再由(2)得到 $\widetilde{A}^{--}=\widetilde{A}^{-}$.

10.7 **定理**(10.6 定理的对偶形式)

(1)$X^{0}=X$

(2)$\widetilde{A}^{0}\subseteq\widetilde{A}$.

(3)$(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})^{0}=\widetilde{A}^{0}\cap\widetilde{B}^{0}$.

(4)$\widetilde{A}^{00}=\widetilde{A}^{0}$.

证明 由 10.5 定理和 10.6 定理易证.

10.8 **引理** $\widetilde{A}^{-0-0}=\widetilde{A}^{-0}$

证明 $\widetilde{A}^{-0}\subseteq\widetilde{A}^{-}$(10.7 定理(2))

$\widetilde{A}^{-0-}\subseteq\widetilde{A}^{--}$(10.1 定义)

$\widetilde{A}^{-0-}\subseteq\widetilde{A}^{-}$(10.6 定理(4))

$\widetilde{A}^{-0-0}\subseteq\widetilde{A}^{-0}$(10.3 定义)

又$\widetilde{A}^{-0-}\supseteq\widetilde{A}^{-0}$(10.6 定理(2))

$\widetilde{A}^{-0-0}\supseteq\widetilde{A}^{-00}$(10.3 定义)

$\widetilde{A}^{-0-0}\supseteq\widetilde{A}^{-0}$(10.7 定理(4))

从而,$\widetilde{A}^{-0-0}=\widetilde{A}^{-0}$.

10.9 **定理**(*Kuratowski*) 对任意 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$,以任意顺序作有限次的取内部、取闭包和取补的运算,最多只能得出十四个彼此

不箱等的不分明集。

证明 由10.5定理知只需考虑取闭包和取补两种运算。又因为$\tilde{A}^{--}=\tilde{A}^{-}$，$\tilde{A}^{CC}=\tilde{A}$，故只需考虑取闭包和取补两种运算交替出现的情形。

现考虑：

第一类：$\tilde{A}$、$\tilde{A}^{-}$、$\tilde{A}^{-C}$、$\tilde{A}^{-C-}$、$\tilde{A}^{-C-C}$、$\tilde{A}^{-C-C-}$、$\tilde{A}^{-C-C-C}$，$\tilde{A}^{-C-C-C-C-}$，……；

第二类：$\tilde{A}^{C}$、$\tilde{A}^{C-}$、$\tilde{A}^{C-C}$、$\tilde{A}^{C-C-}$、$\tilde{A}^{C-C-C}$、$\tilde{A}^{C-C-C-}$、$\tilde{A}^{C-C-C-C}$、$\tilde{A}^{C-C-C-C-}$，

由10.8引理，第一类中的第八个顺序出现的集合$\tilde{A}^{-C-C-C-}=\tilde{A}^{-C-}$，即第四个。

同样由10.8引理，第二类中的第八个集合$\tilde{A}^{-C-C-C-C-}=\tilde{A}^{C-C-}$，也即为第四个集合.

第二章　积空间、商空间

§1　积空间

1.1　**定义**　设$\{(X_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$是一族不分明化拓扑空间．则$\times_{a\in A}X_a$上的子基为

$$\varphi=\int_{a\in A,\,U\in\mathscr{P}(X_a)}\mathscr{T}_a(u)/P_a^{-1}(u)$$

的不分明化拓扑称为$\{\mathscr{T}_a:a\in A\}$的积不分明化拓扑，记做$\times_{a\in A}\mathscr{T}_a$；且$(\times_{a\in A}X_a,\times_{a\in A}\mathscr{T}_a)$称为$\{(X_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$的积空间。其中$P_c:\times_{a\in A}X_a\to X_c$是一个投射，$C\in A$．

1.2　**引理**　设$\{(X_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$是一族不分明化拓扑空间。则积不分明化拓扑是满足如下条件的最小不分明化拓扑：

$$\vDash(\forall a)((a\in A)\to C(P_a))^{(*)}$$

证明　首先证明积不分明化拓扑满足(＊)式，注意到$\forall a\in A,u\in\mathscr{P}(X_a)$，有：

$$(\times_{C\in A}\mathscr{T}_C)(P_a^{-1}(u))\geqslant\varphi(P_a^{-1}(u))=\mathscr{T}_a(u).$$

因此，$[(\forall a)((a\in A)\to C(Pa))]=\inf_{a\in A}\inf_{U\in\mathscr{P}(X_a)}\min(1,1-\mathscr{T}_a(u)+(\times_{C\in A}\mathscr{T}_C)(P_a^{-1}(U)))=1.$

其次，我们验证积不分明化拓扑是所有满足(＊)式中最小的．设$\mathscr{T}$是一个满足(＊)式的不分明化拓扑，则有：

$$\inf_{a\in A}\inf_{U\in\mathscr{P}(X_a)}\min(1,1-\mathscr{T}_a(u)+\mathscr{T}(P_a^{-1}(u)))=1.$$

对$\forall a\in A,U\in\mathscr{P}(X_a),\mathscr{T}(P_a^{-1}(u))\geqslant\mathscr{T}_a(u)=\varphi(P_a^{-1}(u))$，即$\mathscr{T}\supseteq\varphi$．因此$\mathscr{T}\supseteq\mathscr{T}^{(\cap)(U)}\supseteq\varphi^{(\cap)(U)}=\times_{a\in A}\mathscr{T}_a$．□

1.3 **定义** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间．称一元不分明谓词$O\in\mathscr{T}(Y^X)$是不分明开的，若

$$O(f):=(\forall U)((U\in\mathscr{T})\to(f(U)\in\mathscr{U})).$$

即，若f是开的，则$[O(f)]=\inf_{U\subseteq X}\min(1.1-\mathscr{T}(U)+\mathscr{U}(f(U)))$.

1.4 **引理** 设$(X,\mathscr{T})$，$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间．则对$\forall f\in Y^X$，

$$\vDash O(f)\leftrightarrow(\forall U)((U\in\mathscr{B}_X)\to(f(u)\in\mathscr{U})),$$

其中$\mathscr{B}_X$是$\mathscr{T}$的一个基．

证明 显然，$[O(f)]\leqslant[(\forall U)(U\in\mathscr{B}_X)\to(f(u)\in\mathscr{U}))]$.
反之，对$\forall U\in\mathscr{P}(X)$，往证

$$\min(1,1-\mathscr{T}(U)+\mathscr{U}(f(u)))\geqslant[(\forall V)((V\in\mathscr{B}_X)\to(f(v)\in\mathscr{U}))].$$

若$\mathscr{T}(u)\leqslant\mathscr{U}(f(u))$，则不等式明显成立．现设$\mathscr{T}(u)>\mathscr{U}(f(u)$.
若$\bigcup\mathscr{A}=u$，$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$，则$\bigcup_{V\in\mathscr{A}}f(v)=f(\bigcup\mathscr{A})=f(u)$.
因此，$\mathscr{U}(f(u))=\sup_{\mathscr{D}\subseteq\mathscr{P}(Y),\bigcup\mathscr{D}=f(u)}\inf_{W\in\mathscr{D}}\mathscr{U}(W)\geqslant\sup_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X),\bigcup\mathscr{A}=U}\inf_{V\in\mathscr{A}}\mathscr{U}(f(v))$,

$\mathscr{T}(u)-\mathscr{U}(f(u))\leqslant\sup_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X),\bigcup\mathscr{A}=U}\inf_{V\in\mathscr{A}}\mathscr{B}_X(V)-\sup_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X),\bigcup\mathscr{A}=U}\inf_{V\in\mathscr{A}}\mathscr{U}(f(v))$

$\leqslant\sup_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X),\bigcup\mathscr{A}=U}\sup_{V\in\mathscr{A}}(\mathscr{B}_X(V)-\mathscr{U}(f(v)))$,

$\min(1,1-\mathscr{T}(u)+\mathscr{U}(f(u)))\geqslant\inf_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X),\bigcup\mathscr{A}=U}\inf_{V\in\mathscr{A}}\min(1,1-\mathscr{B}_X(v)+\mathscr{U}(f(v)))$

$\geqslant[(\forall v)(v\in\mathscr{B}_X)\to(f(v)\in\mathscr{U}))]$. □

1.5 **定理** 对于任意不分明化拓扑空间簇$\{X_a:a\in A\}$，

$$\vDash(\forall a)((a\in A)\to O(P_a)).$$

证明 对$\forall a\in A$，我们欲证$[O(P_a)]=1$. 若令$\mathscr{B}=\varphi^{(\cap)}$，则由1.4引理，有

$$[O(P_a)]=\inf_{U\in\mathscr{P}(\times_{C\in A}X_C)}\min(1,1-\mathscr{B}(U)+\mathscr{T}_a(P_a(u))).$$

因而,往证对$\forall u\in\mathscr{R}(\times_{C\in A}X_C)$,$\mathscr{B}(u)\leqslant\mathscr{T}_a(P_a(u))$.实际上,若$\mathscr{B}(u)>t$,则有$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{R}(\times_{C\in A}X_C)$使$\bigcap\mathscr{A}=U$且$\inf\limits_{V\in\mathscr{A}}\varphi(V)>t$.故对$\forall V\in\mathscr{A}$, $\varphi(V)>t$,即存在$b(V)\in A$和$W(V)\in\mathscr{R}(X b_{(v)})$使得$P_{b(v)}^{-1}(W(V))=V$且$\mathscr{T}_{b(v)}(W(V))>t$.注意到$P_a(u)=P_a(\bigcap_{V\in\mathscr{A}}P_{b(v)}^{-1}(W(V)))$.

(1)若存在$V\in\mathscr{A}$使$W(V)=\varnothing$,则$P_a(u)=\varnothing$,$\mathscr{T}a(P_a(u))=1$.

(2)若对$\forall V\in\mathscr{A}$, $W(V)\neq\varnothing$,则考虑如下两种情形:

情形1:$a\notin\{b(v):V\in\mathscr{A}\}$,则$P_a(u)=X$,$\mathscr{T}a(P_a(u))=1$,

情形2:$a\in\{b(v):V\in\mathscr{A}\}$.令$a=b(v_0)$,则$Pa(u)=W(v_0)$,$\mathscr{T}a(P_a(u))=\mathscr{T}b(v_0)(W(v_0))>t$.由于$t$是任意的,故而完成证明。□

1.6 **定理** 设$(X_a,\mathscr{T}_a)(a\in A)$和$(Y,\mathscr{U})$都是不分明化拓扑空间。则对$\forall f\in(\times_{a\in A}X_a)^Y$,

$\models C(f)\leftrightarrow(\forall a)((a\in A)\rightarrow C(P_a\circ f))$.

证明 由第一章7.2引理及本节1.2引理,有

$\models C(f)\rightarrow(\forall a)((a\in A)\rightarrow C(P_a\circ f))$.

反之,令$\lambda=[(\forall a)((a\in A)\rightarrow C(P_a\circ f))]$,若有$\lambda\leqslant[C(f)]$即得证.事实上若$[C(f)]<t$,则由第一章7.4定理中$\models C(f)\leftrightarrow\alpha_2(f)$可知存在$U\in\mathscr{R}(\times_{C\in A}X_C)$使$1-\varphi(u)+\mathscr{U}(f^{-1}(u))<t$.因此有$b\in A$和$W\in\mathscr{R}(X_a)$使得$U=P_b^{-1}(W)$且$\mathscr{T}_a(W)>1-t+\mathscr{U}(f^{-1}(u))$.则

$$\begin{aligned}\lambda&=\inf_{a\in A}\inf_{V\in\mathscr{R}(X_a)}\min(1,1-\mathscr{T}_a(v)+\mathscr{U}((P_a\circ f)^{-1}(V))\\&\leqslant1-\mathscr{T}_b(W)+\mathscr{U}((P_a\circ f)^{-1}(W))<t.\end{aligned}$$

由t的任意性知结论成立.□

1.7 **定理** 设$\{X_a:a\in A\}$是一簇不分明化拓扑空间,则对$\forall S\in N(\times_{a\in A}X_a)$,

$\models(S\rhd s)\leftrightarrow(\forall a)((a\in A)\to(P_a\circ S\rhd P_a(s))))$.

证明 由 1.2 引理和第一章 7.4 定理中$\models C(f)\leftrightarrow\alpha_5(f)$，很容易得到$\models(S\rhd s)\to(\forall a)((a\in A)\to(P_a\circ S\rhd P_a(s)))$. 反之，我们欲证$[P_a\circ S\rhd P_a(s)]\leqslant[S\rhd s]$. 若$[S\rhd s]<t$，则存在 $B\in\mathscr{P}(\times_{a\in A}X_a)$使得 $S\not\subseteq B$ 且 $1-N_s(B)<t$，令 $\mathscr{B}=\varphi^{(\cap)}$ 由第一章 2.1 定义可得到

$$\sup_{C\in\mathscr{P}(\times_{a\in A}X_a),\,S\in C\subseteq B}\mathscr{B}(C)\geqslant N_x(B)>1-t.$$

因此，有 $c\in\mathscr{P}(\times_{a\in A}X_a)$使得 $s\in C\subseteq B$ 且$\mathscr{B}(c)>1-t$ 及存在 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(\times_{a=A}X_a)$使$\bigcap\mathscr{A}=C$ 且$\inf_{v\in A}\varphi(v)>1-t$. 故而对$\forall\ V\in\mathscr{A}$，$\varphi(v)>1-t$，即有 $a(v)\in A$ 和$u(v)\in\mathscr{P}(\times_{a(v)})$使得 $V=P_{a(v)}^{-1}(u(v))$，$\mathscr{T}_{a(v)}(u(v))>1-t$. 因 $B\supseteq C=\bigcap_{v\in\mathscr{A}}P_{a(v)}^{-1}(u(v))$，$\mathscr{A}$是有限的，很容易可看出存在 $V_0\in A$，$P_{a(v_0)}\circ s\not\subseteq u(v_0)$. 注意到 $s\in C\subseteq V_0$，$P_{a(v_0)}(s)\in u(v_0)$，有 $N_{Pa(V_0)(s)}(u(v_0))\geqslant\mathscr{T}_{a(v_0)}(u(v_0))>1-t$.

则$\inf_{a\in A}[P_a\circ S\rhd P_a(s)]\leqslant[P_{a(v_0)}\circ S\rhd P_{a(v_0)}(s)]\leqslant 1-N_{Pa(v_0)(s)}(u(v_0))<t$.

由 t 的任意性，完成定理的证明．□

1.8 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是二个不分明化拓扑空间，则

$$\mathscr{B}=\int_{U\subseteq X,\,V\subseteq Y}\mathscr{T}(U)\wedge\mathscr{U}(V)/U\times V$$

是$\mathscr{T}\times\mathscr{U}$的一个子基．

证明 令

$$\varphi=\int_{U\subseteq X}\mathscr{T}(u)/U\times Y\quad\bigcup\int_{V\subseteq Y}\mathscr{U}(v)/X\times V$$

则由 1.1 定义知，φ 是$\mathscr{T}\times\mathscr{U}$的一个子基，因而我们只需证明$\mathscr{B}=\varphi^{(\cap)}$即可．

对任意 $W\subseteq X\times Y$

$$\varphi^{(\cap)}(W)=\sup\{\min_{i=1,\cdots,m}\mathscr{T}(U_i)\wedge\min_{j=1,\cdots,n}\mathscr{U}(V_j)\mid\bigcap_{i=1}^{m}(U_i\times Y)\cap\bigcap_{j=1}^{n}(X\times V_j)=W;m,n\in N\}$$

$$\leqslant\sup\{\mathscr{T}(\bigcap_{i=1}^{m}U_i)\wedge\mathscr{U}(\bigcap_{j=1}^{n}V_j)\mid\bigcap_{i=1}^{m}U_i\times\bigcap_{j=1}^{n}V_j=W,m,n\in N\}$$

$$=\mathscr{B}(W).$$

反之，若 W 不是一个矩形，则 $\mathscr{B}(W)=0$；若 $W=U\times V,U\subseteq X,V\subseteq Y$，则因 $(U\times Y)\cap(X\times V)=W$，有

$$\mathscr{B}(W)=\mathscr{T}(U)\times\mathscr{U}(V)=\varphi(U\times Y)\wedge\varphi(X\times U)\leqslant\varphi^{(\cap)}(W).$$

综上，$\mathscr{B}=\varphi^{(\cap)}$. □

1.9 **引理** 设 $(\bigtimes_{a\in A}X_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)$ 为不分明化拓扑空间簇 $\{X_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$ 的积空间，则对 $\forall x\in\bigtimes_{a\in A}X_a$，有

$$\models B\in N_x\rightarrow P_a(B)\in N_{x_a}.$$

证明

$$N_x(B)=\sup_{x\in C\subseteq B}\varphi^{\cap}(C)$$

$$=\sup_{x\in C\subseteq B}\ \sup_{\substack{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)\\ \bigcap\mathscr{A}=C}}\ \inf_{\substack{D\in\mathscr{A}\\ D=P_{a(D)}^{-1}(U_{a(D)})}}\mathscr{T}_{a(D)}(U_{a(D)})$$

$$\leqslant\mathscr{T}_a(P_a(c))\leqslant\sup_{x_a\in D\subseteq P_a(B)}\mathscr{T}_a(D)=N_{x_a}P_a(B).$$

这是因为 $x_a\in P_a(c)\subseteq P_a(B)$，其中 $X=\bigtimes_{a\in A}X_a$. □

1.10 **引理** 设 $(\bigtimes_{a\in A}X_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)$ 为不分明化拓扑空间簇 $\{(X_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$ 的积空间，则

$$\models P_a^{-1}(B_a)\in N_x\leftrightarrow B_a\in N_{x_a}.$$

证明 由 1.9 引理，我们得到

$$\models P_a^{-1}(B_a)\in N_x\rightarrow P_a(P_a^{-1})(B_a))\in N_{x_a}\rightarrow B_a\in N_{x_a}.$$

相反，$N_{x_a}(B_a)=\sup_{x_a\in C_a\subseteq B_a}\mathscr{T}_a(C_a)=\sup_{x_a\in C_a\subseteq B_a}\varphi(P_a^{-1}(C_a))\leqslant\sup_{x_a\in C_a\subseteq B_a}\varphi^{\cap}(P_a^{-1}(C_a))\leqslant\sup_{x\in C\subseteq P_a^{-1}(B_a)}\varphi^{\cap}(B)=N_x(P_a^{-1}(B_a))$. 这是

因为对任意满足 $x_a \in C_a \subseteq B_a$ 的 C_a 都得到 $x \in P_a^{-1}(C_a) \subseteq P_a^{-1}(B_a)$. □

1.11 **定理** 设$(\bigtimes_{a\in A} X_a, \bigtimes_{a\in A} \mathcal{T}_a)$为不分明化拓扑空间簇$\{(X_a, \mathcal{T}_a): a\in A\}$的积空间，且对任意 $a\in A, B_a \subseteq X_a$，则

$$\models \overline{\bigtimes_{a\in A} B_a} \equiv \bigtimes_{a\in A} \overline{B}_a$$

证明 设 $P_K: \bigtimes_{a\in A} X_a \to X_k$ 是一个投射，则$\models (\forall K)((K\in A) \to C(P_k))$ 且 $\models P_k(\overline{\bigtimes_{a\in A} B_a}) \subseteq \overline{P_k(\bigtimes_{a\in A} B_a)}$，即 $\models P_k(\overline{\bigtimes_{a\in A} B_a}) \subseteq \overline{B}_k$. 因此对任意 $x=(x_a)_{a\in A} \in \overline{\bigtimes_{a\in A} B_a}$, $P_k(x)=x(k)=x_k \in \overline{B}_k$，即 $x=(x_a)_{a\in A} \in \bigtimes_{a\in A} \overline{B}_a$ 因此，$\inf_x \min(1.1-\overline{\bigtimes_{a\in A} B_a}(x)+(\bigtimes_{a\in A} \overline{B}_a)(x))=1$.

反之，对任意 $x=(x_a)_{a\in A} \in \bigtimes_{a\in A} X_a$，据 1.9 引理有

$\models U\in N_x \to P_k(u)\in N_{x_k}$. 因而，对任意 $x=(x_a)_{a\in A} \in \bigtimes_{a\in A} \overline{B}_a$

$$\begin{aligned}
\overline{\bigtimes_{a\in A} B_a}(x) &= \inf_{u\in \mathcal{P}(\bigtimes_{a\in A} X_a)} \min(1.1-N_x(u)+[U\cap(\bigtimes_{a\in A} B_a)\neq \emptyset]) \\
&\geqslant \min(1.1-N_{x_a}(P_a(u))+[(\bigtimes_{a\in A} P_a(u))\cap (\bigtimes_{a\in A} B_a)\neq\emptyset]) = \min(1.1-N_{x_a}(P_a(u))+[\bigtimes_{a\in A}(P_a(u)\cap B_a)\neq\emptyset]) \\
&\geqslant \min(1.1-N_{x_a}(P_a(u))+[P_a(u)\cap B_a\neq\emptyset]) \\
&\geqslant \inf_{D\in\mathcal{P}(X_a)} \min(1.1-N_{x_a}(D)+[D\cap B_a\neq\emptyset]) \\
&= [x_a \in \overline{B}_a]
\end{aligned}$$

$\inf_x \min(1.1-(\bigtimes_{a\in A} \overline{B}_a)(x)+\overline{\bigtimes_{a\in A} B_a}(x))=1$

综上有$[\overline{\bigtimes_{a\in A} B_a} \equiv \bigtimes_{a\in A} \overline{B}_a]=1$. □

1.12 **定理** 设$\{(X_a, \mathcal{T}_a): a\in A\}$是一不分明化拓扑空间簇，$(\bigtimes_{a\in A} X_a, \bigtimes_{a\in A} \mathcal{T}_a)$是其积空间，对$\forall x=(x_a)_{a\in A} \in \bigtimes_{a\in A} X_a$ 和$a_0\in A$ 记$\widetilde{X}_{a_0}=X_{a_0}\times\bigtimes\{x_a\}$，则$\models H(\widetilde{X}_{a_0}, X_{a_0}.)$

证明 设 $P_{a_0}:X\to X_{a_0}$ 表投射，$X=\times_{a\in A}X_a$，令 $f=P_{a_0}|_{\tilde{X}_{a_0}}$，则由定义得 $[H(\tilde{X}_{a_0},X_{a_0})]=[(\exists f)M(f)\wedge(C(f)\wedge C(f^{-1}))]\geqslant[M(f)\wedge([C(f)]\otimes[C(f^{-1})])]=[C(f)]\otimes[C(f^{-1})]=1$. 这是因为 $[C(f)]=[C(f^{-1})]=1$. 下面逐个证明之。注意本节 1.2 引理知 $\models C(P_{a_0})$，所以 $\models[C(P_{a_0})]=\inf\limits_{Y\subseteq X_{a_0}}\min(1,1-\mathcal{T}_{a_0}(Y)+\underset{a\in A}{\times}\mathcal{T}_a(P_{a_0}^{-1}(Y)))(1)\leqslant\inf\limits_{Y\subseteq X_{a_0}}\min(1,1-\mathcal{T}_{a_0}(Y)+\underset{a\in A}{\times}\mathcal{T}_a|_{\tilde{X}_{a_0}}(f^{-1}(Y)))=[C(f)]$，(1) 是根据子空间的定义所得，所以 $[C(f)]=1$. 再证 $[C(f^{-1})]=1$. $[C(f^{-1})]=\inf\limits_{B\subseteq X_{a_0}}\min(1,1-\underset{a\in a}{\times}\mathcal{T}_a|_{\tilde{X}_{a_0}}(B)+\mathcal{T}_{a_0}(f(B)))=\inf\limits_{B\subseteq X_{a_0}}\min(1,1-\varphi|_{\tilde{X}_{a_0}}(B)+\mathcal{T}_{a_0}(f(B)))\geqslant\inf\limits_{B\subseteq\tilde{X}_{a_0}}\min(1,1-\varphi^{\cap}|_{\tilde{X}_{a_0}}(B)+\mathcal{T}_{a_0}(f(B)))$. 其中 $\varphi|_{\tilde{X}_{a_0}}$，$\varphi^{\cap}|_{\tilde{X}_{a_0}}$ 分别为 $\underset{a\in A}{\times}\mathcal{T}_a|_{\tilde{X}_{a_0}}$ 的子基和基，而 φ 和 $\varphi^{\cap}$ 分别为 $\times_{a\in A}\mathcal{T}_a$ 的子基和基。我们要证对任意 $B\subseteq\tilde{X}_{a_0}$，都有 $\varphi^{\cap}|_{\tilde{X}_{a_0}}(B)\leqslant\mathcal{T}_{a_0}(f(B))$. 即 $\sup\limits_{B=C\cap\tilde{X}_{a_0}}\varphi^{\cap}(C)\leqslant\mathcal{T}_{a_0}(f(B))$. 设 $C\in\mathcal{P}(\times_{a\in A}X_a)$ 且 $B=C\cap\tilde{X}_{a_0}$，若 $\varphi^{\cap}(C)=0$，则 $\varphi^{\cap}(C)\leqslant\mathcal{T}_{a_0}f(B)$；若 $\varphi^{\cap}(C)>0$，则 $\varphi^{\cap}(C)=\sup\limits_{\substack{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)\\ \cap\mathcal{A}=C}}\inf\limits_{\substack{D\in\mathcal{A}\\ D=P_{a(D)}^{-1}(U_{a(D)})}}\mathcal{T}_{a(D)}(U_{a(D)})>0$，$X=\underset{a\in A}{\times}X_a$。设 $C=\bigcap\limits_{D\in\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)}P_{a(D)}^{-1}(U_{a(D)})$，$U_{a(D)}\in\mathcal{P}(X_{a(D)})$，$B=B_{a_0}\times\underset{a\neq a_0}{\times}\{x_a\}$，因为 $B=C\cap\tilde{X}_{a_0}$，所以 $P_{a_0}(C)=P_{a_0}|_{\tilde{X}_{a_0}}(B)=f(B)$，又因为 $1=[O(P_{a_0})]$，所以 $1=[O(P_{a_0})]=\inf\limits_{B\subseteq X}\min(1,1-\varphi^{\cap}(B)+\mathcal{T}_{a_0}(P_{a_0}(B)))$. 因为 $[O(P_{a_0})]\leqslant\inf\limits_{B\subseteq X}\min(1,1-\underset{a\in A}{\times}\mathcal{T}_a(B)+\mathcal{T}_{a_0}(P_{a_0}(B)))$，因此 $\varphi^{\cap}(C)\leqslant\mathcal{T}_{a_0}(P_{a_0}(C))=\mathcal{T}_{a_0}(f(B))$，所以

$\sup_{B=C\cap\tilde{X}_{a_0}} \varphi^{\cap}(C) \leqslant \mathscr{T}_{a_0}(f(B))$，即 $\varphi^{\cap}|_{\tilde{X}_{a_0}}(B) \leqslant \mathscr{T}_{a_0}(f(B))$.

故 $[C(f^{-1})]=1.$ □

1.13 **定理** 设 $(X_i,\mathscr{T}_i)(i=1,2)$ 是两个不分明化拓扑空间，对任意 $A_i\in X_i(i=1,2)$，有

$\models (A_1\in\mathscr{T}_1^S)\wedge(A_2\in\mathscr{T}_2^S)\rightarrow(A_1\times A_2)\in(\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2)_S$

证明 注意到 1.11 定理，我们有

$$
\begin{aligned}
&[(A_1\in\mathscr{T}_1^S)\wedge(A_2\in\mathscr{T}_2^S)]\\
&=\sup_{B_1\subseteq A_1}(\mathscr{T}_1(B_1)\wedge\inf_{x_1\in A_1}B_1^-(x_1))\wedge\sup_{B_2\subseteq A_2}(\mathscr{T}_2(B_2)\wedge\inf_{x_2\in A_2}B_2^-(x_2))\\
&=\sup_{B_1\subseteq A_1}\sup_{B_2\subseteq A_2}(\mathscr{T}_1(B_1)\wedge\mathscr{T}_2(B_2)\wedge\inf_{x_1\in A_1}B_1^-(x_1)\wedge\inf_{x_2\subseteq A_2}B_2^-(x_2))\\
&=\sup_{B_1\subseteq A_1,B_2\subseteq A_2}(\varphi(P_1^{-1}(B_1))\wedge\varphi(P_2^{-1}(B_2))\wedge\inf_{x_1\in A_1}B_1^-(x_1)\wedge\inf_{x_2\subseteq A_2}B_2^-(x_2))\\
&\leqslant\sup_{B_1\times B_2\subseteq A_1\times A_2}(\varphi(P_1^{-1}(B_1))\wedge\varphi(P_2^{-1}(B_2))\wedge\inf_{x=(x_1,x_2)\in A_1\times A_2}(B_1^-\times B_2^-)(x))\\
&\leqslant\sup_{B_1\times B_2\subseteq A_1\times A_2}((\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2)(P_1^{-1}(B_1))\wedge(\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2)(P_2^{-1}(B_2))\wedge\inf_{x\in A_1\times A_2}(B_1\times B_2)^{-1}(x))\\
&\leqslant\sup_{B_1\times B_2\subseteq A_1\times A_2}((\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2)(P_1^{-1}(B_1))\cap(P_2^{-1}(B_2))\wedge\inf_{x\in A_1\times A_2}(B_1\times B_2)^-(x))\\
&\quad\sup_{B_1\times B_2\subseteq A_1\times A_2}((\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2)(B_1\times B_2)\wedge\inf_{x\in A_1\times A_2}(B_1\times B_2)^-(x))\\
&=[(A_1\times A_2)\in(\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2)_S].
\end{aligned}
$$

§2 商空间

2.1 **引理** (1)设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，f 是从 X 到 Y 上的映射，则 $\mathscr{U}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(Y))$，

$$U\in\mathscr{U}:=f^{-1}(u)\in\mathscr{T}, \text{即 } \mathscr{U}=\int_{\mathscr{P}(Y)}\mathscr{T}(f^{-1}(u))/u$$

是 Y 上使$\models C(f)$成立的最大的不分明拓扑．我们称这个拓扑为 Y 上的关于f 和 $\mathscr{T}$的商不分明化拓扑．

(2)对$\forall u\subseteq Y$，$\models(U\in\mathscr{F}_Y\leftrightarrow(f^{-1}(u)\in\mathscr{F}_X))$

其中$\mathscr{F}_X,\mathscr{F}_Y$ 分别为X 和 Y 的不分明 $\mathscr{T}$、$\mathscr{U}$一闭集簇．

证明是明显的．□

2.2 **定义** 设 X、Y 是两个不分明化拓扑空间，称一元不分明谓词 $Q\in\mathscr{F}(Y^X)$为不分明闭的，若 $Q(f):=(\forall u)(u\in\mathscr{F}_X)\to(f(U)\in\mathscr{F}_Y))$.

即，若 f 是闭的，则

$$[Q(f)]=\inf_{u\subseteq X}\min(1.1-\mathscr{F}_X(u)+\mathscr{F}_Y(f(u))).$$

2.3 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间，f 是从X 到 Y 上的映射．若成立：

$$\models C(f)\wedge O(f)\text{或}\models C(f)\wedge Q(f)$$

则 $\mathscr{U}$是关于 f 和 $\mathscr{T}$的商不分明化拓扑。

证明 (1)若$\models C(f)\wedge O(f)$，则$\models C(f)$且$\models O(f)$．由$\models C(f)$可得到对$\forall V\subseteq Y$，$\mathscr{U}(v)\leqslant\mathscr{T}(f^{-1}(v))$．由$\models O(f)$得到对$\forall u\subseteq X$，$\mathscr{T}(u)\leqslant\mathscr{U}(f(u))$．因 f 是到上的，故对$\forall V\subseteq Y$，$\mathscr{U}(v)=\mathscr{U}(f(f^{1})(v)))\geqslant\mathscr{T}(f^{-1}(v))$．因此对$\forall V\subseteq Y$，$\mathscr{U}(v)=\mathscr{T}(f^{-1}(v))$，即 $\mathscr{U}$是关于 f 和 $\mathscr{T}$的商不分明化拓扑．

(2)若有$\models C(f)\wedge Q(f)$时，证明完全类似于(1)．□

2.4 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$，$(Z,\mathscr{V})$是三个不分明化拓扑空

间，f 是从 X 到 Y 上的映射，$\mathscr{U}$ 是关于 f 和 $\mathscr{T}$ 的商不分明化拓扑，则对 $\forall g \in Z^X$，

$$\models C(g) \leftrightarrow C(g \circ f).$$

证明 直接计算便可得证，留给读者 .□

2.5 **定义** 设$(X, \mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，R 是 X 上的一个等价关系且 P 是从 X 到 X/R 上的投射 . 若 $\mathscr{U}$ 是 X/R 上关于 P 和 $\mathscr{T}$ 的商不分明化拓扑，则称$(X/R, \mathscr{U})$为$(X, \mathscr{T})$的关于 R 的商不分明化拓扑空间 .

2.6 **定理** 设 P 是从不分明化拓扑空间$(X, \mathscr{T})$到它的商不分明化拓扑空间 X/R 上的投射 . 令

(1) $\alpha_1 = (\forall A)((A \in \mathscr{T}) \rightarrow (R[A] \in \mathscr{T}))$.

$\alpha_2 = (\forall A)((A \in \mathscr{F}_X) \rightarrow (\bigcup \{B \in X/R : B \subseteq A\} \in \mathscr{F}_X))$.

(2) $\beta_1 = (\forall A)((A \in \mathscr{F}_X) \rightarrow (R[A] \in \mathscr{F}_X))$,

$\beta_2 = (\forall A)((A \in \mathscr{T}) \rightarrow (\bigcup \{B \in X/R : B \subseteq A\} \in \mathscr{T}))$.

则(1)$\models O(P) \leftrightarrow \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$，　　(2)$Q(P) \leftrightarrow \beta_1 \leftrightarrow \beta_2$.

证明 注意到 $R[A] = P^{-1}(P(A))$和$\bigcup \{B \in X/R : B \subseteq A\} = X \sim R[X \sim A]$，直接计算便可得到 .□

2.7 **定义** 设$(X, \mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间 . 称一元不分明谓词 $C_u \in \mathscr{F}(P)$为不分明上半连续的，若

$C_u(\mathscr{D}) := (\forall D)(\forall u)((D \in \mathscr{D}) \wedge (U \in \mathscr{T}) \wedge (D \subseteq U) \rightarrow (\exists V)((V \in \mathscr{T}) \wedge (V \in \mathscr{D}^{(U)}) \wedge (D \subseteq V \subseteq U)))$,

其中 P 是 X 上的所有分划簇且 $\mathscr{D}^{(U)}$ 表示 $\mathscr{D}$ 的并扩张，即，$\mathscr{D}^{(U)} = \{\bigcup \mathscr{A} : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{D}\}$.

2.8 **定理** 设 X 是不分明化拓扑空间，$\mathscr{D}$ 是 X 的分划，则

$$\models C_u(\mathscr{D}) \leftrightarrow Q(P),$$

其中 P 是从 X 到 $\mathscr{D}$ 上的投射 .

证明 若$[Q(P)] = \inf_{U \in \mathscr{F}(X)} \min(1, 1 - \mathscr{F}_X(U) + \mathscr{F}_{\mathscr{D}}(P(U))) >$

t，则对 $\forall U\in\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{F}_{\mathscr{D}}(P(U))>t+\mathscr{F}_X(U)-1$. $\forall D\in\mathscr{D}$ 及 $U\in\mathscr{P}(X)$ 且 $D\subseteq U$，令 $V_0=P^{-1}(\mathscr{D}\sim P(X\sim U))=\bigcup\{A:A\in\mathscr{D}\sim P(X\sim U)\}\in\mathscr{D}^{(U)}$，不难看出 $D\subseteq V_0\subseteq U$. 另外，

$\mathscr{T}(V_0)=\mathscr{U}(\mathscr{D}\sim P(X\sim U))=\mathscr{F}_{\mathscr{D}}(P(X\sim U))\geqslant t+\mathscr{F}_X(X\sim U)-1=t+\mathscr{T}(U)-1$，其中 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{D}$ 上的商不分明化拓扑，且 $1-\mathscr{F}(U)+\sup\limits_{V\in\mathscr{D}^{(U)}D\subseteq V\subseteq U}\mathscr{T}(V)\geqslant 1-\mathscr{T}(U)+\mathscr{T}(V_0)>t$.

因此，$[C_u(\mathscr{D})]=\inf\limits_{D\in\mathscr{D},U\in\mathscr{P}(X),D\subseteq U}\min(1,1-\mathscr{T}(U)+\sup\limits_{V\in\mathscr{D}^{(U)},D\subseteq V\subseteq U}\mathscr{T}(v))\geqslant t$. 因为 t 是任意的，故而有$[C_u(\mathscr{D})]\geqslant[Q(P)]$.

反之，若$[C_u(\mathscr{D})]>t$，则对 $\forall D\in\mathscr{D}$, $U\in\mathscr{P}(X)$，存在 $V\in\mathscr{D}^{(U)}$，只要 $D\subseteq U$，就有 $D\subseteq V\subseteq U$ 和 $\mathscr{T}(V)>t+\mathscr{T}(U)-1$. 对 $\forall U\in\mathscr{P}(X)$，我们往证 $\mathscr{F}_{\mathscr{D}}(P(U))\geqslant t+\mathscr{F}_X(U)-1$. 若 $P(U)=\mathscr{D}$，则是显然的。若 $P(U)\neq\mathscr{D}$，则对 $\forall D\in\mathscr{D}\sim P(U)$，$D\subseteq X\sim U$，还存在 V_D 使得 $V_D=\bigcup\mathscr{A}_D$，$\mathscr{A}_D\subseteq\mathscr{D}$，$D\subseteq V_D\subseteq U$ 且有 $\mathscr{T}(V_D)>t+\mathscr{T}(X\sim U)-1$. 对 $\forall D\in\mathscr{D}\sim P(U)$，因 $\bigcup\mathscr{A}_D=V_D\subseteq X\sim U$，故 $\mathscr{A}_D\subseteq\mathscr{D}\sim P(U)$. 所以

$$\begin{aligned}\bigcup\{D:D\in\mathscr{D}\sim P(U)\}&\subseteq\bigcup\{V_D:D\in\mathscr{D}\sim P(U)\}\\&=\bigcup\{\bigcup\mathscr{A}_D:D\in\mathscr{D}\sim P(U)\}\subseteq\bigcup\{D:D\in\mathscr{D}\sim P(U)\}.\end{aligned}$$

即，$\bigcup\{V_D:D\in\mathscr{D}\sim P(U)\}=\bigcup\{D:D\in\mathscr{D}\sim P(U)\}$. 从而，

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\mathscr{D}}(P(U))&=\mathscr{U}(\mathscr{D}\sim P(U)=\mathscr{T}(P^{-1}(\mathscr{D}\sim P(U))]\\&=\mathscr{T}(\bigcup\{D:D\in\mathscr{D}\sim P(U)\})\\&=\mathscr{T}(\bigcup\{V_D:D\in\mathscr{D}\sim P(U)\})\\&\geqslant\inf\{\mathscr{T}(V_D):D\in\mathscr{D}\sim P(U)\}\geqslant t+\mathscr{T}(X\sim U)-1\\&=t+\mathscr{F}_X(U)-1.\end{aligned}$$

这样，便得到$[Q(P)]\geqslant t$. 因为 t 是任意的，便有$[Q(P)]\geqslant[C_u(\mathscr{D})]$. □

第三章 不分明化拓扑空间的可数性公理

§1 不分明集合的不分明可数性

本节为第三章做准备工作。

设 X 是一个论域，$\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$. 若 $\widetilde{A}$ 的支撑

$\mathrm{supp}\widetilde{A}=\{x\in X:\widetilde{A}(x)>0\}$.

是有限的，则称 $\widetilde{A}$ 是有限的，并记做 $F(\widetilde{A})$，若是可数的，则称 $\widetilde{A}$ 是可数的，记做 $C(\widetilde{A})$. 一元不分明谓词 $FF\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(X))$ 及 $FC\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(X))$ 分别称为是不分明有限性和不分明可数性，若

$FF(\widetilde{A}):=(\exists\widetilde{B})(F(\widetilde{B})\wedge(\widetilde{A}\equiv\widetilde{B}))$. 及

$FC(\widetilde{A}):=(\exists\widetilde{B})(C(\widetilde{B})\wedge(\widetilde{A}\equiv\widetilde{B}))$.

1.1 **引理** 对任意 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(X)$

$$
\begin{aligned}
(1)[FF(\widetilde{A}\}]&=1-\inf\{\alpha\in[0.1]:F(\widetilde{A}_\alpha)\}\\
&=1-\inf\{\alpha\in[0.1]:F(\widetilde{A}_{[\alpha])\}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)[FC(\widetilde{A})]&=1-\inf\{\alpha\in[0.1]:C(\widetilde{A}_\alpha)\}\\
&=1-\inf\{\alpha\in[0.1]:C(\widetilde{A}_{[\alpha]})\},
\end{aligned}
$$

其中 $\widetilde{A}_\alpha=\{x\in X:\widetilde{A}(x)\geqslant\alpha\}$，$\widetilde{A}_{[\alpha]}=\{x\in X:\widetilde{A}(x)>\alpha\}$.

证明 我们仅证明(2)中的第一个等式，其余的证明是完全类似的 . 由定义可知

$$[FC(\widetilde{A})]=1-\inf_{\substack{\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)\\ C(\widetilde{B})}}\sup_{x\in X}|\widetilde{A}(x)-\widetilde{B}(x)|.$$

因此只需证明 $\inf\limits_{\substack{\widetilde{B}\in\mathscr{F}(X)\\ C(\widetilde{B})}}\sup\limits_{x\in X}|\widetilde{A}(x)-\widetilde{B}(x)|=\inf\{\alpha:C(\widetilde{A}_\alpha)\}$.

事实上，若 $C(\widetilde{A}_\alpha)$，则令

$$\tilde{D}(x)=\begin{cases}\tilde{A}(x), & x\in\tilde{A}_\alpha,\\ 0, & x\notin\tilde{A}_\alpha.\end{cases}$$

于是 $C(\tilde{D})$，且 $\inf\limits_{\substack{\tilde{B}\in\mathscr{F}(X)\\C(\tilde{B})}}\sup\limits_{x\in X}|\tilde{A}(x)-\tilde{B}(x)|\leqslant\sup\limits_{x\in X}|\tilde{A}(x)-\tilde{D}(x)|=\sup\limits_{x\notin\tilde{A}_\alpha}\tilde{A}(x)\leqslant\alpha$. 因此 $\inf\limits_{\substack{\tilde{B}\in\mathscr{F}(X)\\C(\tilde{B})}}\sup\limits_{x\in X}|\tilde{A}(x)-\tilde{B}(x)|\leqslant\inf\{\alpha:C(\tilde{A}_\alpha)\}$. 反之，若 $\tilde{B}\in\mathscr{F}(X)$，则对任意的 $\alpha>\sup\limits_{x\in X}|\tilde{A}(x)-\tilde{B}(x)|$，有 $\tilde{A}_\alpha\subseteq\mathrm{supp}\tilde{B}$. 实际上，若 $y\in\tilde{A}_\alpha$，则 $\tilde{A}(y)\geqslant\alpha>|\tilde{A}(y)-\tilde{B}(y)|\geqslant\tilde{A}(y)-\tilde{B}(y)$，且 $\tilde{B}(y)>0$，即，$y\in\mathrm{supp}\tilde{B}$. 因此，由 $C(\tilde{B})$ 可推出 $C(\tilde{A}_\alpha)$，于是 $\sup\limits_{x\in X}|\tilde{A}(x)-\tilde{B}(x)|=\inf\{\alpha:\alpha>\sup\limits_{x\in X}|\tilde{A}(x)-\tilde{B}(x)|\}\geqslant\inf\{\alpha:C(\tilde{A}_\alpha)\}$.

即反向不等式也是成立的 .□

下面我们给出有关不分明可数性的一些结果，至于不分明有限性也有相应的结论，不再累赎了。

1.2 **推论** $C(\tilde{A})$当且仅当$[FC(\tilde{A})]=1$.

证明 若$[FC(\tilde{A})]=1$，则由上述引理可得出 $\inf\{\alpha:C(\tilde{A}_\alpha)\}=0$.

现对 $\forall n\in N$，$C(\tilde{A}_{1/n})$成立 . 因为 $\mathrm{supp}\tilde{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{1/n}$，$C(\tilde{A})$成立 .□

1.3 **引理** 对任意 $f,\tilde{A}$，

$\models FC(\tilde{A})\rightarrow FC(f(\tilde{A}))$.

证明 因为 $f(\tilde{A})_{[\alpha]}=f(\tilde{A}_{[\alpha]})$，$C(\tilde{A}_{[\alpha]})$ 可推出 $C(f(\tilde{A})_{[\alpha]})$. 因此

$$\begin{aligned}[FC(f(\tilde{A}))]&=1-\inf\{\alpha:C(f(\tilde{A})_{[\alpha]})\}\\&=1-\inf\{\alpha:(\tilde{A}_{[\alpha]})\}\\&=[FC(\tilde{A})].\square\end{aligned}$$

1.4 **引理** (1)对任意 $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$，

$\models FC(\tilde{A}_1)\wedge FC(\tilde{A}_2)\rightarrow FC(\tilde{A}_1\cup\tilde{A}_2)$

(2)对任意 $\widetilde{A}_i, i\in N$,

$\models(\forall i)(i\in N\rightarrow FC(\widetilde{A}_i))\rightarrow FC(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{A}_i)$.

证明 我们仅证明(2),若 $C((\widetilde{A}_i)_{[\alpha_i]}), i\in N$ 且 $\alpha=\sup_{i\geq 1}\alpha_i$,则 $C((\widetilde{A}_i)_{[\alpha]}), i\in N$,进而 $C(\bigcup_{i=1}^{\infty}(\widetilde{A}_i)_{[\alpha]})$. 因此,$\inf\{\sup_{i\geq 1}\alpha_i: C((\widetilde{A}_i)_{[\alpha_i]}), i\in N\}\geqslant\inf\{\alpha: C(\bigcup_{i=1}^{\infty}(\widetilde{A}_i)_{[\alpha]})\}$. 注意到 $[FC(\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{A}_i)]=1-\inf\{\alpha: C((\bigcup_{i=1}^{\infty}\widetilde{A}_i)_{[\alpha]})\}=1-\inf\{\alpha: C(\bigcup_{i=1}^{\infty}(\widetilde{A}_i)_{[\alpha]})\}$,
故而

$$[(\forall_i)(i\in N\rightarrow FC(\widetilde{A}_i)]=1-\sup_{i\geq 1}\inf\{\alpha_i: C((\widetilde{A}_i)_{[\alpha_i]})\}$$
$$=1-\inf(\sup_{i\geq 1}\alpha_i: C((\widetilde{A}_i)_{[\alpha_i]})i\in N\}.\square$$

1.5 **引理** 对任意的 $\widetilde{A},\widetilde{B}$,

$\vdash(\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B})\rightarrow(FC(\widetilde{B})\rightarrow FC(\widetilde{A}))$.

证明 情形1.$\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}$. 对 $\forall\alpha\in[0.1], \widetilde{A}_\alpha\subseteq\widetilde{B}_\alpha$,且 $C(\widetilde{B}_\alpha)$ 推出 $C(\widetilde{A}_\alpha)$. 由1.1引理,得到 $[FC(\widetilde{B})]\leqslant[FC(\widetilde{A})]$.

情形2 $\widetilde{A}\supseteq\widetilde{B}$,令

$$\lambda=\inf_{\substack{\widetilde{D}\in\mathscr{F}(X)\\ C(\widetilde{D})}}\sup_{x\in X}|\widetilde{A}(x)-\widetilde{D}(x)|,$$

$$\mu=\inf_{\substack{\widetilde{D}\in\mathscr{F}(X)\\ C(\widetilde{D})}}\sup_{x\in X}|\widetilde{B}(x)-\widetilde{D}(x)|.$$

由定义,可得到 $[FC(\widetilde{B})\rightarrow FC(\widetilde{A})]=\min(1,1-(\lambda-\mu))$.

若 $\lambda\leqslant\mu$,则结论显然是成立的. 若 $\lambda>\mu$,则

$$\lambda-\mu=\sup_{\widetilde{D}\in\mathscr{F}(X)}\sup_{x\in X}||\widetilde{A}(x)-\widetilde{D}(x)|-|\widetilde{B}(x)-\widetilde{D}(x)||$$
$$\leqslant\sup_{x\in X}|\widetilde{A}(x)-\widetilde{B}(x)|=\sup_{x\in X}(\widetilde{A}(x)-\widetilde{B}(x)).$$

因此,$[FC(\widetilde{B})\rightarrow FC(\widetilde{A})]\geqslant\min(1,1-\sup_{x\in X}(\widetilde{A}(x)-\widetilde{B}(x)))=[\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}]$. 在一般情形下,令 $U=\{x\in X:\widetilde{A}(x)\leqslant\widetilde{B}(x)\}$, $V=X\sim U$,且

$$\tilde{A}_1(x)=\begin{cases}\tilde{A}(x), & x\in u,\\ 0, & x\in v,\end{cases}\qquad \tilde{A}_2(x)=\begin{cases}\tilde{A}(x), & x\in v\\ 0, & x\in u,\end{cases}$$

$$\tilde{B}_1(x)=\begin{cases}\tilde{B}(x), & x\in u,\\ 0, & x\in v,\end{cases}\qquad \tilde{B}_2(x)=\begin{cases}\tilde{B}(x), & x\in v\\ 0, & x\in u.\end{cases}$$

明显,$[\tilde{A}\subseteq\tilde{B}]=[\tilde{A}_2\subseteq\tilde{B}_2]$. 因为 $\tilde{A}_2\supseteq\tilde{B}_2$,从情形 2 有

$[\tilde{A}_2\subseteq\tilde{B}_2]\leqslant[FC(\tilde{B}_2)\to FC(\tilde{A}_2)]$. 因 $\tilde{A}_1\subseteq\tilde{B}_1,\tilde{B}_1\subseteq\tilde{B},\tilde{B}_2\subseteq\tilde{B}$,有

$$[FC(\tilde{B})\to FC(\tilde{A}_1)]=1,[\tilde{A}_2\subseteq\tilde{B}_2]\leqslant[FC(\tilde{B})\to FC(\tilde{A}_2)].$$

因此,

$$\begin{aligned}[\tilde{A}_2\subseteq\tilde{B}_2]&\leqslant[(FC(\tilde{B})\to FC(\tilde{A}_1))\wedge(FC(\tilde{B})\to FC(\tilde{A}_2))]\\&=[FC(\tilde{B})\to FC(\tilde{A}_1)\wedge FC(\tilde{A}_2)].\end{aligned}$$

又因 $\tilde{A}=\tilde{A}_1\cup\tilde{A}_2$,故以 1.4 引理(1),得到

$$[\tilde{A}_2\subseteq\tilde{B}_2]\leqslant[FC(\tilde{B})\to FC(\tilde{A})].\ \square$$

§2 第一和第二可数的不分明化拓扑空间

2.1 **定义** 设Σ是不分明化拓扑空间类,称一元不分明谓词 $C_I\in\mathscr{F}(\Sigma)$为不分明第一可数性,若 $C_I(X,\mathscr{T}):=(\forall x)((\exists\mathscr{B}_x)((\mathscr{B}_x\vdash N_x)\wedge FC(\mathscr{B}_x)))$。

即,$C_I=\int_\Sigma\inf_{x\in X}\sup_{\mathscr{B}_x\vdash N_x}[FC(\mathscr{B}_x)]/(X,\mathscr{T})$.

称一元不分明谓词 $C_{\mathrm{II}}\in\mathscr{F}(\Sigma)$为不分明第二可数性,

若 $C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T}):=(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\vdash\mathscr{T})\wedge FC)(\mathscr{B}))$.

即 $C_{\mathrm{II}}=\int_\Sigma\sup_{\mathscr{B}\vdash\mathscr{T}}[FC(\mathscr{B})]/(X,\mathscr{T})$.

2.2 **引理** 对任意$(X,\mathscr{T})$,

$\models C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})\to C_{\mathrm{I}}(X,\mathscr{T})$.

证明 对任意 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{T},x\in X$,令

$$\mathscr{B}_x(A)=\begin{cases}\mathscr{B}(A), & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

明显地 $\mathscr{B}_x\vdash N_x$，由 1.5 引理可得到 $[FC(\mathscr{B})]\leqslant[FC(\mathscr{B}_x)]$. 因此，$[C_{\mathrm{I}}(X,\mathscr{T})]=\inf_{x\in X}\sup_{\mathscr{B}_x\vdash N_x}[FC(\mathscr{B}_x)]\geqslant\inf_{x\in X}[FC(\mathscr{B}_x)]\geqslant[FC(\beta)]$.

从而有 $[C_{\mathrm{I}}(X,\mathscr{T})]\geqslant\sup_{\mathscr{B}\vdash\mathscr{T}}[FC(\mathscr{B})]\geqslant[C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})]$. □

2.3 **定理** 对任意的 $(X,\mathscr{T})$,

$(A\subseteq X)\land\neg\, C(A)\models C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})\to\neg\,(A\cap A'\equiv\varnothing)$.

证明 设 A 是非可数的．若 $[C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})]\leqslant[\neg\,(A\cap A'\equiv\varnothing)]$ 不成立，则有 t_1,t_2 使得

$[C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})]>t_1>t_2>[\neg\,(A\cap A'\equiv\varnothing)]$.

由定义可知 $\sup_{\mathscr{B}\vdash\mathscr{T}}[FC(\mathscr{B})]=[C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})]>t$，即存在 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{T}$ 使得 $[FC(\mathscr{B})]>t$. 据 1.1 引理有

$1-\inf\{\alpha:C(\mathscr{B}_\alpha)\}=[FC(\mathscr{B})]>t_1$，或 $\inf\{\alpha:C(\mathscr{B}_\alpha)\}<1-t_1$.

因此，存在 $\alpha_0<1-t_1$ 使 $C(\mathscr{B}_{\alpha_0})$. 此外，由第一章 3.2 引理，

$$\begin{aligned}1-\inf_{x\in A}N_x((X\sim A)\cup\{x\})&=\sup_{x\in A}(1-N_x((X\sim A)U\{x\}))\\&=\sup_{x\in A}A'(x).\\&=[\neg\,(A\cap A'\equiv\varnothing)]<t_2.\end{aligned}$$

对任意 $x\in A$，$\sup_{x\in B\subseteq(X\sim A)\cup\{x\}}\mathscr{B}(B)\geqslant N_x((X\sim A)\cup\{x\})>1-t_2$.

于是存在 B_x 使得 $x\in B_x\subseteq(X\sim A)\cup\{x\}$ 且 $\mathscr{B}(B_x)>1-t_2>1-t_1>\alpha_0$. 即，$x\in\mathscr{B}_{\alpha_0}$. 由于对任意 $x\in A$，$x\in B_x\subseteq(X\sim A)\cup\{x\}$，当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $B_{x_1}\neq B_{x_2}$. 然而，$\mathscr{B}_{\alpha_0}\supseteq\{B_x:x\in A\}$，$A$ 是非可数的．这同 $C(\mathscr{B}_{\alpha_0})$ 相矛盾．□

2.4 **引理** 设 X 是一个集合．则对 $\forall\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 和 $\lambda\in[0.1]$，有

$$(\mathscr{A}^{(\cap)})_{[\lambda]}\subseteq(\mathscr{A}_{[\lambda]})^{(\cap)}$$

证明 若 $B \in (\mathscr{A}^{(\cap)})_{[\lambda]}$，则

$$\sup_{\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X), \bigcap \mathscr{B} = B} \inf_{C \in \mathscr{B}} \mathscr{A}(C) = \mathscr{A}^{(\cap)}(B) > \lambda,$$

也就是存在 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ 使得 $\bigcap \mathscr{B} = B$ 且对 $\forall C \in \mathscr{B}$, $\mathscr{A}(C) > \lambda$，即 $C \in \mathscr{A}_{[\lambda]}$. 所以 $B = \bigcap \mathscr{B} \in (\mathscr{A}_{[\lambda]})^{(\cap)}$. □

2.5 **定理** 对任意不分明化拓扑空间簇 $\{(X_a, \mathscr{T}_a) : a \in A\}$，

$\models (\forall a)((a \in A) \to C_{\mathrm{I}}(X_a))$

$\to (C_{\mathrm{I}}(\bigtimes_{a \in A} X_a) \leftrightarrow (\exists B)((B \subseteq A) \wedge C(B) \wedge \forall b(b \in A \sim B)$

$\to (\mathscr{T}_b \equiv \{\varnothing, X_b\})))).$

证明 令

$\alpha = [(\forall a)((a \in A) \to C_{\mathrm{I}}(X_a))] = \inf_{a \in A} \inf_{x_a \in X_a} \sup_{\mathscr{B}_{x_a} \vdash N_{x_a}} [FC(\mathscr{B}_{x_a})]$,

$\beta = [C_{\mathrm{I}}(\bigtimes_{a \in A} X_a)] = \inf_{x \in \bigtimes_{a \in A} X_a} \sup_{\mathscr{B}_x \vdash N_x} [FC(\mathscr{B}_x)]$,

$\gamma = [(\exists B)((B \subseteq A) \wedge C(B) \wedge (\forall b)((b \in A \sim B) \to (\mathscr{T}_b \equiv \{\varnothing, X\})))]$

$= \sup_{B \subseteq A, C(B)} \inf_{b \in A \sim B} \inf_{M_b \in \mathscr{P}(X_b) - \{\varnothing, X_b\}} (1 - \mathscr{T}_b(M)).$

(1)若 $\alpha > s$, $\beta > t$，则对 $\forall a \in A$, $x_a \in X_a$，存在 $\mathscr{B}_{x_a} \vdash N_{x_a}$ 使得 $[FC(\mathscr{B}_{x_a})] = 1 - \inf\{\lambda : ((\mathscr{B}_{x_a})_{[\lambda]})\} > s$，即，有 $\lambda_a < 1 - s$ 使得 $C((\mathscr{B}_{x_a})_{[\lambda_a]})$，且存在 $B \subseteq A$ 使得 $C(B)$ 及 $\forall b \in A \sim B$, $M_b \in \mathscr{P}(X_b) \sim \{\varnothing, X_b\}$, $\mathscr{T}_b(M_b) < 1 - t$. 对 $\forall x \in \bigtimes_{a \in A} X_a$，设

$$\theta_x = \int_{a \in A, U_a \in \mathscr{P}(X_a)} \beta_{x_a}(U_a) / P_a^{-1}(U_a).$$

(i)首先，对 $\forall U \in \mathscr{P}(\bigtimes_{a \in A} X_a)$，有

$$\begin{aligned}\theta_x(u) &= \sup_{a \in A, u_a \in \mathscr{P}(X_a), u = P_a^{-1}(u_a)} \mathscr{B}_{x_a}(u_a) \\ &\leqslant \sup_{a \in A, U_a \in \mathscr{P}(X_a), U = P_a^{-1}(U_a)} N_{x_a}(U_a) \\ &= \sup_{a \in A, u_a \in \mathscr{P}(X_a), u = P_a^{-1}(u_a)} \sup_{x_a \in v_a \subseteq u_a} \mathscr{T}_a(v_a)\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{x\in v\subseteq u}\varphi(v) \quad (\text{当 } x_a\in v_a\subseteq u_a \text{ 时}, x\in P^{-1}(v_a)\subseteq P_a^{-1}(u_a)=u)$$

$$\leqslant \sup_{x\in v\subseteq u}(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)(v)=N_x(u)$$

其中，$\varphi=\int_{a\in A,u_a\in\mathscr{P}(X_a)}\mathscr{T}_a(u_a)/P_a^{-1}(u)$是$\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a$ 的一个子基．由第一章 1.7 定理(2)，得到

$$\theta_x^{(\cap)}(u)=\sup_{\mathscr{U}\subseteq\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A}X_a)\cap\mathscr{U}=u}\inf_{V\in\mathscr{U}}\theta_x(v)$$

$$\leqslant \sup_{\mathscr{U}\subseteq\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A}X_a)\cap\mathscr{U}=u}\inf_{V\in\mathscr{U}}N_x(v)$$

$$\leqslant \sup_{\mathscr{U}\subseteq\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A}X_a)\cap\mathscr{U}=u}N_x(\bigcap\mathscr{U})=N_x(u).$$

其次，若 $x\in u$，则

$$\varphi_x(u)=\varphi(u)=\sup_{a\in A,u_a\in\mathscr{P}(X_a),u=P_a^{-1}(u_a)}\mathscr{T}_a(u_a)$$

$$\leqslant \sup_{a\in A,u_a\in\mathscr{P}(X_a),u=P_a^{-1}(u_a)}N_{x_a}(u_a)$$

$$\leqslant \sup_{a\in A,u_a\in\mathscr{P}(X_a),u=P_a^{-1}(u_a)}\sup_{x_a\in v_a\subseteq u_a}\mathscr{B}_{x_a}(v_a)$$

$$\leqslant \sup_{x\in v\subseteq u}\theta_x(v) \quad (\text{因 } x_a\in v_a\subseteq u_a \text{ 时 } x\in P_a^{-1}(v_a)\subseteq P_a^{-1}(u_a)).$$

$$\varphi_x^{(\cap)}(u)=\sup_{\mathscr{U}\subseteq\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A}X_a)\cap\mathscr{U}=u}\inf_{u\in\mathscr{U}}\varphi_x(v)$$

$$\leqslant \sup_{\mathscr{U}\subseteq\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A}X_a)\cap\mathscr{U}=u}\inf_{u\in\mathscr{U}}\sup_{x\in w\subseteq v}\theta_x(w)$$

$$=\sup_{\mathscr{U}\subseteq\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A}X_a)\cap\mathscr{U}=u}\sup_{f\in\bigtimes_{v\in\mathscr{U}}Z_v}\inf_{v\in\mathscr{U}}\theta_x(f(v)).$$

$$\leqslant \sup_{x\in Q\subseteq u}\sup_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A}X_a),\cap\mathscr{A}=Q}\inf_{p\in\mathscr{A}}\theta_x(p)$$

$$=\sup_{x\in Q\subseteq u}\theta_x^{(\cap)}(Q).$$

(当 $\mathscr{U}\subseteq\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A}X_a)$，$\bigcap\mathscr{U}=u$ 及 $f\in\bigtimes_{v\in\mathscr{U}}Z_v$ 时 $x\in\bigcap_{v\in\mathscr{U}}f(v)\subseteq u$，其中对 $\forall\, v\in\mathscr{U}$，$Z_v=\{w:x\in w\subseteq v\}$．)反之有，

$$N_x(u)\leqslant\sup_{v\subseteq u}\varphi_x^{(\cap)}(v)\leqslant\sup_{v\subseteq u}\sup_{x\in w\subseteq v}\theta_x^{(\cap)}(w)=\sup_{x\in w\subseteq u}\theta_x^{(\cap)}(w).$$

因此有 $\theta_x^{(\cap)} \vdash N_x$.

(ii)对任意 $\lambda > 2 - s - t$,有

$$(\theta_x)_{[\lambda]} = (\bigcup_{a\in A} \int_{u_a \in \mathscr{H}(X_a)} \mathscr{B}_{x_a}(u_a)/P_a^{-1}(u_a))_{[\lambda]}$$

$$= \bigcup_{a\in A} (\int_{u_a \in \mathscr{H}(X_a)} \mathscr{B}_{x_a}(u_a)/P_a^{-1}(u_a))_{[\lambda]}$$

$$\subseteq \bigcup_{a\in B} (\int_{u_a \in \mathscr{H}(X_a)} \mathscr{B}_{x_a}(u_a)/P_a^{-1}(u_a))_{[1-s]} \cup \bigcup_{a\in A\sim B} (\int_{u_a \in \mathscr{H}(X_a)} \mathscr{B}_{x_a}(u_a)/P_a^{-1}(u_a))_{[1-t]} \subseteq \bigcup_{a\in B} \{P_a^{-1}(u_a) : u_a \in (\mathscr{B}_a)_{[1-s]}\} \cup \bigcup_{a\in A\sim B} (\int_{u_a \in \mathscr{H}(X_a)} \mathscr{B}_{x_a}(u_a)/P_a^{-1}(u_a))_{[1-t]}$$

$$\subseteq \bigcup_{a\in B} \{P_a^{-1}(u_a) : u_a \in (\mathscr{B}_a)_{[\lambda_a]}\} \cup \bigcup_{a\in A\sim B} \{X_a\}.$$

于是$(\theta_x)_{[\lambda]}$是可数的．由 2.4 引理知$(\theta_x^{(\cap)})_{[\lambda]} \subseteq ((\theta_x)_{[\lambda]})^{(\cap)}$,故而$(\theta_x^{(\cap)})_{[\lambda]}$也是可数的．

综合(i)与(ii)得到

$$\sup_{\mathscr{B}_x \vdash N_x} [FC(\mathscr{B}_x)] \geqslant [FC(\theta_x^{(\cap)})]$$

$$= 1 - \inf\{\lambda : C((\theta_x^{(\cap)})_{[\lambda]})\}$$

$$\geqslant 1 - (2 - s - t) = s + t - 1.$$

因此,$\beta \geqslant \max(0. s + t - 1)$. 因为 s, t 都是任意的,我们有 $\beta \geqslant \max(0, \alpha + \gamma - 1)$.

(2)若 $\gamma < t$,则

$$\inf_{f\in \times_{B\in\Lambda}(A\sim B)} \sup_{B\in\Lambda} \inf_{M_{f(B)}\in\mathscr{H}(X_{f(B)})\sim\{\emptyset, X_{f(B)}\}} (1 - \mathscr{T}_{f(B)}(M_{f(B)})) =$$

$\gamma < t$,其中$\Lambda = \{B : B \subseteq A$ 且$C(B)\}$. 因此,存在 $f \in \times_{B\in\Lambda}(A \sim B)$使得

$$\sup_{B\in\Lambda} \inf_{M_{f(B)}\in\mathscr{H}(X_{f(B)})\sim\{\emptyset, X_{f(B)}\}} (1 - \mathscr{T}_{f(B)}(M_{f(B)})) < t.$$

首先,我们可知 $f(\Lambda)$不是可数的．其实若不然,则 $f(\Lambda) \in \Lambda$,进而 $f(f(\Lambda)) \in f(\Lambda)$与 $f(f(\Lambda)) \in A \sim f(\Lambda)$同时成立．其

次，对 $\forall b\in f(\Lambda)$, $\inf_{M_b\in\mathscr{P}(X_b)\sim(\varnothing,X_b)}(1-\mathscr{T}_b(M_b))<t$. 即，存在 $M_b\in\mathscr{P}(X_b)\sim\{\varnothing,X_b\}$ 使 $\mathscr{T}_b(M_b)>1-t$. 现对 $\forall b\in f(\Lambda)$. 选取 $x\in\times_{a\in A}X_a$ 使 $x_b\in M_b$. 我们往证 $\sup_{\mathscr{B}_x\vdash N_x}[FC(\mathscr{B}_x)]\leqslant t$. 这只需证明 $\mathscr{B}_x\vdash N_x$ 及 $\lambda<1-t$, $(\mathscr{B}_x)_{[\lambda]}$ 是非可数的．假设 $(\mathscr{B}_x)_{[\lambda]}$ 是可数的．对 $\forall u\in(\mathscr{B}_x)_{[\lambda]}$, 有

$$\lambda<\mathscr{B}_x(u)\leqslant N_x(u)\leqslant\sup_{V\subseteq U}(\varphi_x^{(\cap)}(v)).$$

即，存在 $V\subseteq U$ 使得

$$\sup_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(\times_{a\in A}X_a)\cap\mathscr{A}=v}\ \inf_{w\in\mathscr{A},a\in A}\ \sup_{u_a\in\mathscr{P}(X_a),w=P_a^{-1}(u_a)}\mathscr{T}_a(u_a)=$$

$$\sup_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(\times_{a\in A}X_a)\cap\mathscr{A}=v}\ \inf_{w\in\mathscr{A}}\varphi_x(w)=\varphi_x^{(\cap)}(v)>\lambda,$$

即，存在 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(\times_{a\in A}X_a)$ 使得 $\cap\mathscr{A}=V$ 且对 $\forall w\in\mathscr{A}$, 存在 $a_w\in A$, $U_{a_w}\in\mathscr{P}(X_{x_a})$ 使 $P_{a_w}^{-1}(U_{a_w})=w$ 及 $\mathscr{T}_{a_w}(U_{a_w})>\lambda$. 因此存在 $n\in N$ 和 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$, $u_{a_i}\in\mathscr{P}(X_{a_i})(i=1,2,\cdots,n)$ 使得 $\cap_{i=1}^n P_{a_i}^{-1}(u_{a_i})=v\subseteq u$ 且 $\mathscr{T}_{a_i}(u_{a_i})>\lambda(i=1,\cdots,n)$. 若 $a\notin\{a_1,\cdots,a_n\}$, 则 $P_a(u)=X_a$. 因此, $A_u=\{a\in A:P_a(u)\neq X\}$ 是一个有限集．令 $D=\bigcup_{u\in(\mathscr{B}_x)_{[\lambda]}}A_u$. 因 $(\mathscr{B}_x)_{[\lambda]}$ 是有限的，从而 D 也是有限的．因为 $f(\Lambda)$ 是不可数的, $f(\Lambda)\sim D\neq\varnothing$. 故对 $\forall u\in(\mathscr{B}_x)_{[\lambda]}$, 存在 $a_0\in f(\Lambda)\sim D$, $P_{a_0}(u)=X_{a_0}$. 然而,

$$\sup_{V=P_{a_0}^{-1}(M_{a_0})}\mathscr{B}_x(v)\geqslant N_x\{P_{a_0}^{-1}(M_{a_0}))\geqslant(\times_{a\in A}\mathscr{T}_a)(P_{a_0}^{-1}(M_{a_0}))$$

$$\geqslant\varphi^{(\cap)}(P_{a_0}^{-1}(M_{a_0}))\geqslant\varphi(P_{a_0}^{-1}(M_{a_0}))\geqslant\mathscr{T}_{a_0}(M_{a_0})>1-t,$$

即，存在 $V\subseteq P_{a_0}^{-1}(M_{a_0})$ 使 $\mathscr{B}_x(v)>1-t>\lambda$. 此外, $P_{a_0}(v)\subseteq P_{a_0}(P_{a_0}^{-1}(M_{a_0}))\subseteq M_{a_0}\neq X_{a_0}$, 这与 $\mathscr{B}_x(v)>\lambda$ 矛盾，因对 $\forall u\in(\mathscr{B}_x)_{[\lambda]}$, $P_{a_0}(u)=X_{a_0}$.

这样便得到 $\beta\leqslant\sup_{\mathscr{B}_x\vdash N_x}[FC(\mathscr{B}_x)]\leqslant t$. 由 t 的任意性得到 $\mathscr{B}\leqslant\gamma$. □

§3 可分的空间和 *Lindelöf* 空间

3.1 **定义** 称一元不分明谓词 $D\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 是不分明稠密的，若

$$D(A):=\overline{A}\equiv X,$$

即，$D=\int_{\mathscr{P}(X)}\inf_{x\in X}\overline{A}(x)/A$.

3.2 **定义** 设 Σ 是不分明化拓扑空间类，称一元不分明谓词 $d\in\mathscr{F}(X)$ 为不分明可分性，若

$$d(X,\mathscr{T}):=(\exists A)((A\subseteq X)\wedge C(A)\wedge D(A)).$$

即，$d=\int_{\Sigma}\sup_{A\subseteq X,\,C(A)}[D(A)]/(X,\mathscr{T})$.

3.3 **定理** 对任意 $(X,\mathscr{T})$，

$\models C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})\rightarrow d(X,\mathscr{T})$.

证明 若 $[C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})]>t$，则存在 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{T}$ 使得

$[FC(\mathscr{B})]=1-\inf\{\alpha:C(\mathscr{B}_\alpha)\}>t$,

即，$\inf\{\alpha:C(\mathscr{B}_\alpha)\}<1-t$，且存在 $\alpha_0<1-t$，使 $C(\mathscr{B}_{\alpha_0})$，现从 $\mathscr{B}_{\alpha_0}$ 中的每一个元素里选取一个点组成一个集合 A 并证明 $[D(A)]\geqslant t$. 事实上，对 $\forall x\in X$，由第一章 2.1 定义有

$$N_x(X\sim A)\leqslant\sup_{x\in B\subseteq X\sim A}\mathscr{B}(B).$$

由 A 的构造我们可知 $B\notin\mathscr{B}_{\alpha_0}$，即当 $x\in B\subseteq X\sim A$ 时，$\mathscr{B}(B)<\alpha_0<1-t$. 因此，$N_x(X\sim A)\leqslant 1-t$，于是

$$\overline{A}(x)=1-N_x(X\sim A)\geqslant t.$$

现在可断言 $[D(A)]=\inf_{x\in X}\overline{A}(x)\geqslant t$. 由 t 的任意性，$[C_{\mathrm{II}}(X,\mathscr{T})]\leqslant[d(X,\mathscr{T})]$. □

3.4 **定义** (1)设 X 是一个集合. 二元不分明谓词 $K\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X))$ 称为不分明复盖，若

$$K(\mathscr{A},A):=(\forall x)(x\in A)\rightarrow(\exists B)((B\in\mathscr{A})\wedge(x\in B))).$$

(2)设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间．二元不分明谓词 $K_0\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X))$称为不分明开复盖，若

$K_0(\mathscr{A},A):=K(\mathscr{A},A)\dot{\wedge}(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})$.

3.5 **定理**(*lindelöf*) 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，对$\forall A\subseteq X$,

$\models C_{\rm II}(X,\mathscr{T})\to(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},A)\to(\exists\mathscr{D})(((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},A))\dot{\wedge}FC(\mathscr{D})))$. 其中$\leqslant\in\mathscr{P}(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))\times\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)))$是一个二元分明谓词，并且 $\mathscr{B}\leqslant\mathscr{C}$ 表示对$\forall M\in\mathscr{P}(X)$, $\mathscr{B}(M)\leqslant\mathscr{C}(M)$.

证明 若$[C_{\rm II}(X,\mathscr{T})]>t$，则存在 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{T}$，且 $\alpha_0<1-t$，使得 $C(\mathscr{B}_{\alpha_0})$. 现对$\forall\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，我们欲证

$[K_0(\mathscr{A},A)\to(\exists\mathscr{D})(((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},A))\dot{\wedge}FC(\mathscr{D}))]\geqslant t$.
即，$[(\exists\mathscr{D})(((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},A))\dot{\wedge}FC(\mathscr{D}))]\geqslant t+[K_0(\mathscr{A},A)]-1$.

假设$[K_0(\mathscr{A},A)]>\lambda$，即$[K(\mathscr{A},A)]+[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}]-1>\lambda$. 再令 $\sigma=[K(\mathscr{A},A)]$. 则$[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}]>\lambda+1-\sigma$，即对$\forall B\in\mathscr{P}(X)$. $1-\mathscr{A}(B)+\mathscr{T}(B)>\lambda+1-\sigma$，于是 $\mathscr{A}(B)+\lambda-\sigma<\mathscr{T}(B)$. 因为 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{T}$，存在 $\mathscr{M}_B\subseteq\mathscr{P}(X)$使得$\bigcap\{M:M\in\mathscr{M}_B\}=B$ 且 $\inf\limits_{M\in\mathscr{M}_B}\mathscr{B}(M)>\mathscr{A}(B)+\lambda-\sigma$.

则对$\forall M\in\mathscr{M}_B$, $\mathscr{B}(M)>\mathscr{A}(B)+\lambda-\sigma$. $\qquad(*)$

令 $\mathscr{M}=\bigcup_{B\in\mathscr{A}_{\alpha_0+\sigma-\lambda}}\mathscr{M}_B$. 则由$(*)$得到 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{B}_{\alpha_0}$，于是 $C(\mathscr{M})$. 现对$\forall M\in\mathscr{M}$，若令 $N_M=\{B:M\subseteq B\in\mathscr{A}_{\alpha_0+\sigma-\lambda}\}$, $u_M=\sup\{\mathscr{A}(B):B\in N_M\}$，则对$\forall\varepsilon>0$，存在 $B_M^\varepsilon\in N_M$ 满足 $\mathscr{A}(B_M^\varepsilon)>u_M-\varepsilon$. 置 $N^\varepsilon=\{B_M^\varepsilon:M\in\mathscr{M}\}$ 及

$$\mathscr{D}^\varepsilon(B)=\begin{cases}\mathscr{A}(B), & B\in N^\varepsilon,\\ 0, & B\notin N^\varepsilon.\end{cases}$$

则有 $\mathscr{D}^\varepsilon\leqslant\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{D}^\varepsilon_{\alpha_0+\sigma-\lambda}\subseteq N^\varepsilon$. 进而由 $\mathscr{M}$ 的可数性知 N^ε 和

$\mathscr{D}^{\varepsilon}_{\alpha_0+\sigma-\lambda}$是可数的．于是，

$$[FC(\mathscr{D}^{\varepsilon})]=1-\inf\{\alpha:C(\mathscr{D}^{\varepsilon}_{\alpha})\}\geqslant 1-(\alpha_0+\sigma-\lambda).$$

若$\lambda\leqslant\alpha_0$，则有$t+[K_0(\mathscr{A},A)]-1=\lambda-(1-t)<\lambda-\alpha_0\leqslant 0$.

若$\lambda>\alpha_0$，则有$\inf\limits_{x\in A}\sup\limits_{x\in B\in\mathscr{P}(X)}\mathscr{A}(B)=[K(\mathscr{A},A)]=\sigma>\alpha_0+\sigma-\lambda$.

因此，$\forall x\in A,\delta\in(0,\lambda-\alpha_0]$，存在$B_x$使得$x\in B_x\in\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{A}(B_x)>\sigma-\delta$. 故$B_x\in\mathscr{A}_{\alpha_0+\sigma-\lambda}$，$\mathscr{M}_{B_x}\subseteq\mathscr{M}$. 因$\bigcup\{M:M\in\mathscr{M}_{B_x}\}=B_x$，则有$M_x$使$x\in M_x$且有$B^{\varepsilon}_{M_x}$使$B^{\varepsilon}_{M_x}\in N_{M_x}$，$B^{\varepsilon}_{M_x}\in N^{\varepsilon}$且$\mathscr{A}(B^{\varepsilon}_{M_x})>u_{M_x}-\varepsilon$. 因$M_x\subseteq B_x'$，有

$$\mathscr{A}(B^{\varepsilon}_{M_x})>\mathscr{A}(B_x)-\varepsilon>\sigma-(\varepsilon+\delta),$$

于是，$\sup\limits_{x\in C\in N^{\varepsilon}}\mathscr{A}(C)\geqslant\mathscr{A}(B^{\varepsilon}_{M_x})>\sigma-(\varepsilon+\delta)$. 因为$\delta$是任意的，

$$\sup_{x\in C\in N^{\varepsilon}}\mathscr{A}(C)\geqslant\sigma-\varepsilon,$$

因而
$$[K(\mathscr{D}^{\varepsilon},A)]=\inf_{x\in A}\sup_{x\in C\in\mathscr{P}(X)}\mathscr{D}^{\varepsilon}(C)=\inf_{x\in A}\sup_{x\in C\in N^{\varepsilon}}\mathscr{A}(C)\geqslant\sigma-\varepsilon.$$

所以
$$\begin{aligned}&[(\exists\mathscr{D})(((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},A))\dot{\wedge}FC(\mathscr{D}))]\\ &\geqslant\sup_{n\geqslant 1}[((\mathscr{D}^{1/n}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D}^{1/n},A))\dot{\wedge}FC(\mathscr{D}^{1/n})]\\ &\geqslant\sup_{n\geqslant 1}\max(0.\sigma-\frac{1}{n}+1-(\alpha_0+\sigma-\lambda)-1)\\ &=\lambda-\alpha_0>t+\lambda-1.\end{aligned}$$

故而由λ的任意性，得到

$$[(\exists\mathscr{D})(((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge(K(\mathscr{D},A))\dot{\wedge}FC(\mathscr{D}))]\geqslant t+[K_0(\mathscr{A},A)]-1.\square$$

3.6 **定义** 设Σ是不分明化拓扑空间类．一元不分明谓词$L\in\mathscr{F}(\Sigma)$称为不分明 *Lindelöf* 性，若

$$L(X,\mathscr{T}):=(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{D})(((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},X))\dot{\wedge}FC(\mathscr{D}))).$$

第四章 不分明化拓扑空间中的连通性

§1 隔离子集

1.1 **定义** 设 X 是一不分明化拓扑空间,二元不分明谓词 $S\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X))$ 称为不分明分离,若

$$S(A,B):=(\bar{A}\cap B\equiv\varnothing)\wedge(A\cap\bar{B}\equiv\varnothing).$$

1.2 **引理** 设 X 是一不分明化拓扑空间,对 $\forall A,B\subseteq X$,令

$$\sigma(A,B)=(A\in\mathscr{F}_{A\cup B})\wedge(B\in\mathscr{F}_{A\cup B})\wedge(A\cap B\equiv\varnothing),$$

$$\delta(A,B)=(A\in\mathscr{T}|_{A\cup B})\wedge(A\in\mathscr{F}_{A\cup B})\wedge(A\cap B\equiv\varnothing),$$

则有 $\models S(A,B)\leftrightarrow\sigma(A,B)\leftrightarrow\delta(A,B)$.

其中 $\mathscr{F}_{A\cup B}$ 是 $A\cup B$ 中不分明 $\mathscr{T}|_{A\cup B}$——闭集簇。

证明 明显的有 $\models\sigma(A,B)\leftrightarrow\delta(A,B)$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$,则显然成立 $[S(A,B)]=[\sigma(A,B)]=0$. 现假设 $A\cap B=\varnothing$. 借助于简单的真值律计算有

$$[A\cup(\bar{A}\cap B)\equiv A]=[\bar{A}\cap B\equiv\varnothing].$$

因此

$$\begin{aligned}[A\in\mathscr{F}_{A\cup B}]&=[Cl_{A\cup B}A\equiv A]=[Cl_XA\cap(A\cup B)\equiv A]\\&=[(Cl_XA\cap A)\cup(Cl_XA\cap B)\equiv A]\\&=[\bar{A}\cap B\equiv\varnothing].\end{aligned}$$

同样,$[B\in\mathscr{F}_{A\cup B}]=[A\cap\bar{B}\equiv\varnothing]$.

从而引理结论成立 .□

1.3 **定理** 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一不分明化拓扑空间 . 则对 $\forall\ Y,Z\subseteq X$,有

(1) $\models(Y\in\mathscr{T})\wedge(Z\in\mathscr{T})\rightarrow S(Y\sim Z,Z\sim Y)$.

(2)$\models(Y\in\mathscr{T})\wedge(Z\in\mathscr{T})\to S(Y\sim Z,Z\sim Y)$.

证明 (1)因为 $Z\sim Y=(Y\cup Z)\sim Y$,故有

$\models(Y\in\mathscr{F})\to(Y\in\mathscr{F}_{Y\cup Z})\to(Z\sim Y\in\mathscr{T}|_{Y\cup Z})$.

由第二章6.3引理及 $Y\sim Z=(Y\sim Z)\cup(Z\sim Y)\sim(Z\sim Y)$.得到

$\models(Y\in\mathscr{F})\to(Z\sim Y\in\mathscr{T}|_{(Y\sim Z)\cup(Z\sim Y)})\to(Y\sim Z\in\mathscr{F}_{(Y\sim Z)\cup(Z\sim Y)})$

同样可以得到$\models(Z\in\mathscr{F})\to(Z\sim Y\in\mathscr{F}_{(Y\sim Z)\cup(Z\sim Y)})$.

最后再注意到1.2引理则完成(1)的证明.

(2)$\models(Y\in\mathscr{T})\wedge(Z\in\mathscr{T})\to(X\sim Y\in\mathscr{F})\wedge(X\sim Z\in\mathscr{F})$

$\to S((X\sim Y)\sim(X\sim Z),(X\sim Z)\sim(X\sim Y))$

$\to S(Z\sim Y,Y\sim Z)\to S(Y\sim Z,Z\sim Y)$.□

1.4 **引理** 若 $Y,Z\in\mathscr{P}(X)$且 $X=Y\cup Z$,则对$\forall\tilde{A}\in\mathscr{F}(X)$,$\models\tilde{A}\cap(Y\sim Z)\equiv\varnothing\leftrightarrow\tilde{A}\subseteq Z$.

证明 因为 $Y\sim Z=X\sim Z$,则有

$$[\tilde{A}\cap(Y-Z)\equiv\varnothing]=\inf_{x\in Y\sim Z}(1-\tilde{A}(x))$$

$$=\inf_{x\in X\sim Z}(1-\tilde{A}(x))=[\tilde{A}\subseteq Z].\square$$

1.5 **定理** 设 X 是一不分明化拓扑空间,则对$\forall Y,Z\subseteq X$,

$(X=Y\cup Z)\models S(Y\sim Z,Z\sim Y)\to\overline{A}_X\equiv\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z}$.

证明 假设 $X=Y\cup Z$,则

$$\overline{A}_X=\overline{(A\cap Y)_X}\cup\overline{(A\cap Z\sim Y)_X},$$

于是 $\overline{A}_X\cap Y=((\overline{(A\cap Y)_X}\cap Y)\cup((\overline{(A\cap Z\sim Y)_X}\cap Y)$

$=\overline{(A\cap Y)_Y}\cup((\overline{(A\cap Z\sim Y)_X}\cap Y)$.

同样,$\overline{A}_X\cap Z=(A\cap Z)_Z\cup((\overline{(A\cap Y\sim Z)_X}\cap Z)$.

因此,$\overline{A}_X\ (\overline{A}_X\cap Y)\cup(\overline{A}_X\cap Z)$

$=\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z}\cup$

$((\overline{(A\cap Z\sim Y)_X}\cap Y)\cup((\overline{(A\cap Y\sim Z)_X}\cap Z)$..

此外又有

$\models S(Y\sim Z,Z\sim Y)\to\overline{(Z\sim Y)_X}\cap(Y\sim Z)\equiv\emptyset\to\overline{(Z\sim Y)_X}\subseteq Z$

$\to\overline{(A\cap Z\sim Y)_X}\subseteq Z\to\overline{(A\cap Z\sim Y)_X}\subseteq\overline{(A\cap Z)_Z}\cap Z$

$\to(A\cap Z\sim Y)_X\subseteq\overline{(A\cap Z)_Z}\to\overline{(A\cap Z\sim Y)_X}\cap Y\subseteq\overline{(A\cap Z)_Z}$.

同样可得$\models S(Y\sim Z,Z\sim Y)\to\overline{(A\cap Y\sim Z)_X}\cap Z\subseteq\overline{(A\cap Y)_Y}$.

由于总成立 $\bar{A}_X\supseteq\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z}$,故而

$\models S(Y\sim Z,Z\sim Y)$

$\to((\overline{(A\cap Z\sim Y)_X}\cap Y)\cup((\overline{(A\cap Y\sim Z)_X}\cap Z)\subseteq\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z}$

$\to\bar{A}_X\subseteq\overline{(A\cap Y)_Y}\cup(A\cap Z)_Z$

$\to\bar{A}_X\equiv\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z}$.□

1.6 **推论** 设$(X,\mathscr{T})$是一不分明化拓扑空间,对$\forall Y,Z\subseteq X$,

(1)$X=Y\cup Z\models S(Y\sim Z,Z\sim Y)\to((A\cap Y\in\mathscr{F}_Y)\wedge(A\cap Z\in\mathscr{F}_Z)\to(A\in\mathscr{F}_X))$,

(2)$X=Y\cap Z\models S(Y\sim Z,Z\sim Y)\to((A\cap Y\in\mathscr{T}|_Y)\wedge(A\cap Z\in\mathscr{T}|_Z)\to(A\in\mathscr{T}))$.

证明 (1)假设 $X=Y\cup Z$,则由 1.5 定理,

$\models S(Y\sim Z,Z\sim Y)\to(\bar{A}_X\equiv\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z}$

另有$\models(A\cap Y\in\mathscr{F}_Y)\wedge(A\cap Z\in\mathscr{F}_Z)$

$\to((\overline{(A\cap Y)_Y}\equiv A\cap Y)\wedge(\overline{(A\cap Z)_Z}\equiv A\cap Z)$

$\to((\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z}\equiv(A\cap Y)\cup(A\cap Z)=A$.

及$\models(\bar{A}_X\equiv\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z})\to(((\overline{(A\cap Y)_Y}\cup\overline{(A\cap Z)_Z}\equiv A)\to(\bar{A}_X\equiv A))$.

因此,$\models S(Y\sim Z,Z\sim Y)\to((A\cap Y\in\mathscr{F}_Y)\wedge(A\cap Z\in\mathscr{F}_Z)\to(\bar{A}_X$

$\equiv A))$.

即,$\models S(Y\sim Z, Z\sim Y)\rightarrow((A\cap Y\in\mathscr{F}_Y)\wedge(A\cap Z\in\mathscr{F}_Z)\rightarrow(A\in\mathscr{F}_X))$.

(2)由(1)可得到

$X=Y\cup Z\models S(Y\sim Z, Z\sim Y)\rightarrow(((X\sim A)\cap Y\in\mathscr{F}_Y)\wedge((X\sim A)\cap Z\in\mathscr{F}_Z)\rightarrow(X\sim A\in\mathscr{F}_X))$.

另外,显然成立$\models(A\cap Y\in\mathscr{T}|_Y)\wedge(A\cap Z\in\mathscr{T}|_Z)\leftrightarrow(((X\sim A)\cap Y\in\mathscr{F}_Y)\wedge((X\sim A)\cap Z\in\mathscr{F}_Z)$.

因此,$X=Y\cup Z\models S(Y\sim Z, Z\sim Y)\rightarrow((A\cap Y\in\mathscr{T}|_Y)\wedge(A\cap Z\in\mathscr{T}|_Z)\rightarrow(A\in\mathscr{T}))$. □

§2 连通空间

2.1 **定义** (1)设Σ是一个不分明化拓扑空间类,一元不分明谓词$I\in\mathscr{F}(\Sigma)$称为不分明连通,定义如下:

$I(X,\mathscr{T}):=\neg(\exists A)(\exists B)(S(A,B)\wedge(X=A\cup B)\wedge(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing))$.

即,$I=\int_{\Sigma}\inf_{\substack{A,B\in\mathscr{F}(X)\\ X=A\cup B,A,B\neq\varnothing}}(1-[S(A,B)])/(X,\mathscr{T})$.

(2)设$(X,\mathscr{T})$是一不分明化拓扑空间,一元不分明谓词$I\in\mathscr{P}(\mathscr{F}(X))$称为不分明连通,定义为:

$I(Y):=I(Y,\mathscr{T}|_Y)$.

2.2 **引理** 设X是一不分明化拓扑空间. 对$\forall\ Y\subseteq X$.

$\models I(Y)\leftrightarrow\neg(\exists A)(\exists B)(S(A,B)\wedge(Y=A\cup B)\wedge(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing))$.

证明 由上述定义,

$\models I(Y)\leftrightarrow\neg(\exists A)(\exists B)(S_Y(A,B)\wedge(Y=A\cup B)\wedge(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing))$,

其中 S_Y 是$(Y,\mathcal{T}|_Y)$中的不分明分离．因此只需证明$\models S(A,B)\leftrightarrow S_Y(A,B)$. 事实上，

$$\models S_Y(A,B)\leftrightarrow(\bar{A}_Y\cap B\equiv\varnothing)\wedge(A\cap\bar{B}_Y\equiv\varnothing)$$
$$\leftrightarrow((\bar{A}_X\cap Y)\cap B\equiv\varnothing)\wedge(A\cap(\bar{B}_X\cap Y)\equiv\varnothing)$$
$$\leftrightarrow((\bar{A}_X\cap(Y\cap B)\equiv\varnothing)\wedge((Y\cap A)\cap\bar{B}_X\equiv\varnothing)$$
$$\leftrightarrow(\bar{A}_X\cap B\equiv\varnothing)\wedge(A\cap\bar{B}_X\equiv\varnothing)\leftrightarrow S(A,B).\square$$

2.3 **引理** 设$(X,\mathcal{T})$是一不分明化拓扑空间，则对$\forall Y\subseteq X$,

$$\models I(Y)\leftrightarrow(\forall A)((A\subseteq Y)\wedge(A\in\mathcal{T}|_Y)\wedge(A\in\mathcal{F}_Y)\rightarrow A\in\{\varnothing,Y\}).$$

其中$\mathcal{F}_Y$是Y中的不分明$\mathcal{T}|_Y$—闭集簇．

证明$\models I(Y)\leftrightarrow\neg(\exists A)(\exists B)(S(A,B)\wedge(Y=A\cup B)\wedge(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing))$

$$\leftrightarrow\neg(\exists A)((A\subseteq Y)\wedge S(A,Y\sim A)\wedge A\notin\{\varnothing,Y\})$$
$$\leftrightarrow(\forall A)(\neg((A\subseteq Y)\wedge S(A,Y\sim A))\vee(A\in\{\varnothing,Y\}))$$
$$\leftrightarrow(\forall A)((A\subseteq Y)\wedge S(A,Y\sim A))\rightarrow A\in\{\varnothing,Y\}).$$

因为$[A\in\{\varnothing,Y\}]\in\{0.1\}$.

因此我们只需去证明$\models(A\subseteq Y)\wedge S(A,Y\sim A)\leftrightarrow(A\subseteq Y)\wedge(A\in\mathcal{T}|_Y)\wedge(A\in\mathcal{F}_Y)$. 而这由 2.2 引理即可得到．$\square$

2.4 **定理** 设$(X,\mathcal{T})$是一不分明化拓扑空间，则对$\forall Y,Z\subseteq X$, $\models I(Y)\wedge(Z\equiv\bar{Y})\rightarrow I(Z)$

证明 若 $Y\not\subseteq Z$，则$[Z\equiv\bar{Y}]=0$ 且

$$[I(Y)\wedge(Z\equiv\bar{Y})]=0\leqslant I(Z).$$

现假设 $Y\subseteq Z$. 若$[I(Z)]=\inf\limits_{A\subseteq Z,A\neq\varnothing,Z}\max(1-(\mathcal{T}|_Z)(A),1-\mathcal{F}_Z(A))<t$，则存在 $A\subseteq Z$ 使得$A\neq\varnothing$，且$(\mathcal{T}|_Z)(A)>1-t$, $\mathcal{F}_Z(A)>1-t$.

情形 1: $A\cap Y=\varnothing$. 则有 $Y\subseteq Z\sim A$, $Cl_ZY\subseteq Cl_Z(Z\sim A)$，另因 $A\neq\varnothing$，故存在 $x_0\in A$. 进而

$$[I(Y)\wedge(Z\equiv\overline{Y})]\leqslant[Z\equiv\overline{Y}]=\inf_{x\in X}(1-|Z(x)-\overline{Y}(x)|]$$

$$=\min(\inf_{x\in Z}\overline{Y}(x),\inf_{x\notin Z}(1-\overline{Y}(x)))$$

$$\leqslant\overline{Y}(x_0)\leqslant\sup_{x\in A}\overline{Y}(x)$$

$$=1-\inf_{x\in A}(1-\overline{Y}(x))$$

$$=1-\inf_{x\in A}\min(1,1-(\overline{Y}\cap Z)(x)+(Z\sim A)(x))$$

$$=1-[\overline{Y}\cap Z\subseteq Z\sim A]=1-[Cl_Z Y\subseteq Z\sim A]$$

$$\leqslant 1-[Cl_Z Y\subseteq Cl_Z(Z\sim A)\wedge(Cl_Z(Z\sim A)\subseteq Z\sim A)]$$

$$=1-[Cl_Z(Z\sim A)\subseteq Z\sim A]$$

$$=1-\mathscr{F}_Z(Z\sim A)=1-(\mathscr{T}|_Z)(A)<t.$$

情形 2：$A\cap Y=Y$. 由对偶性$[I(Y)\wedge(Z\equiv\overline{Y})]<t$.

情形 3：$A\cap Y\neq\varnothing, Y$. 由第二章 6.2 定义，6.3 引理和 6.4 定理，有

$$[I(Y)\wedge(Z\equiv\overline{Y})]\leqslant I(Y)=\inf_{B\leqslant Y,B\neq\varnothing,Y}\max(1-(\mathscr{T}|_Y)(B),1-\mathscr{F}_Y(B))$$

$$\leqslant\max(1-(\mathscr{T}|_Y)(A\cap Y),1-\mathscr{F}_Y(A\cap Y))$$

$$\leqslant\max(1-(\mathscr{T}|_Z)(A),1-\mathscr{F}_Z(A))<t$$

总而言之，有$[I(Y)\wedge(Z\equiv\overline{Y})]<t$. 由 t 的任意性知结论是正确的 .□

2.5 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是一不分明化拓扑空间 . 对任意 $Y_\lambda\subseteq X(\lambda\in\Lambda)$，有

$$\models(\forall\lambda)I(Y_\lambda)\wedge(\forall\lambda_1)(\forall\lambda_2)\neg S(Y_{\lambda_1},Y_{\lambda_2})\rightarrow I(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda).$$

证明 若$[I(\bigcup_{\lambda\in I}Y_\lambda)]$

$$=\inf_{A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda,A\neq\varnothing,\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda}\max(1-(\mathscr{T}|_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda})(A),1-\mathscr{F}_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda}(A))<t,$$

则存在 $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$ 使得$A\neq\emptyset,\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$ 且

$$(\mathscr{T}|_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda})(A)>1-t,\mathscr{F}_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda}(A)>1-t.$$

情形 1:存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使 $A\cap Y_{\lambda_0}\neq\emptyset, Y_{\lambda_0}$. 则有

$$[(\forall\lambda)I(Y_\lambda)\wedge(\forall\lambda_1)(\forall\lambda_2)\neg S(Y_{\lambda_1},Y_{\lambda_2})]$$
$$\leqslant[(\forall\lambda)I(Y_\lambda)]\leqslant[I(Y_{\lambda_0})]$$
$$=\inf_{B\subseteq Y_{\lambda_0},B\notin\{\emptyset,Y_{\lambda_0}\}}\max(1-(\mathscr{T}|_{Y_{\lambda_0}})(B),1-\mathscr{F}_{Y_{\lambda_0}}(B))$$
$$\leqslant\max(1-(\mathscr{T}|_{Y_{\lambda_0}})(A\cap Y_{\lambda_0}),1-\mathscr{F}_{Y_{\lambda_0}}(A\cap Y_{\lambda_0}))$$
$$\leqslant\max(1-(\mathscr{T}|_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda})(A),1-\mathscr{F}_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda}(A))<t.$$

情形 2:对$\forall\lambda\in\Lambda,A\cap Y_\lambda\in\{\emptyset,Y_\lambda\}$,则有 $Y_\lambda\subseteq A$ 或 $Y_\lambda\subseteq\bigcup_{\sigma\in\Lambda}Y_\sigma\sim A(\forall\lambda\in\Lambda)$.

(i)存在 λ_1^0,λ_2^0 使 $Y_{\lambda_1^0}\subseteq A$, $Y_{\lambda_2^0}\subseteq\bigcup_{\sigma\in\Lambda}Y_\sigma\sim A$. 则有$[S(Y_{\lambda_1^0},Y_{\lambda_2^0})]\geqslant[S(A,\bigcup_{\sigma\in\Lambda}Y_\sigma\sim A)]=\min((\mathscr{T}|_{\bigcup_{\sigma\in\Lambda}Y_\sigma})(A),\mathscr{F}_{\bigcup_{\sigma\in\Lambda}Y_\sigma}(A))>1-t$,且

$$[(\forall\lambda)I(Y_\lambda)\wedge(\forall\lambda_1)(\forall\lambda_2)\neg S(Y_{\lambda_1},Y_{\lambda_2})]$$
$$\leqslant[(\forall\lambda_1)(\forall\lambda_2)\neg S(Y_{\lambda_1},Y_{\lambda_2})]$$
$$\leqslant[\neg S(Y_{\lambda_1^0},Y_{\lambda_2^0})]<t.$$

(ii) $\forall\lambda\in\Lambda$, $Y_\lambda\subseteq A$. 则得到$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda\subseteq A$,这与 $A\neq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$ 相矛盾 .

(iii) $\forall\lambda\in\Lambda$, $Y_\lambda\subseteq\bigcup_{\sigma\in\Lambda}Y_\lambda\sim A$. 则得到$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda\subseteq\bigcup_{\sigma\in\Lambda}Y_\lambda\sim A$,这与 $A\neq\emptyset$ 相矛盾 .

换言之,我们有:当$[I(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda)]<t$ 时,

$[(\forall\lambda)I(Y_\lambda)\wedge(\forall\lambda_1)(\forall\lambda_2)\neg S(Y_{\lambda_1},Y_{\lambda_2})]<t$. 由 t 的任意性,结论成立 .□

2.6 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间,$A\subseteq X$,$f\in\mathscr{F}(Y^X)$,则

$\models I(A) \mathbin{\&} C(f) \rightarrow I(f(A))$.

证明 $[I(A) \mathbin{\&} C(f)] = \max(0, \inf_{B \subseteq Y} \min(1, 1 - \mathscr{U}(B) + \mathscr{T}(f^{-1}(B))) + [I(A)] - 1) = \max(0, \inf_{B \subseteq Y} \min(1, 1 - \mathscr{U}(B) + \mathscr{T}(f^{-1}(B)))) - \sup_{\substack{C \subseteq A \\ C \neq \varnothing, A}} \min(\mathscr{T}|_A(C), \mathscr{T}|_A(A - C))) = \alpha$, $[I(f(A))] = 1 - \sup_{\substack{B \subseteq f(A) \\ B \neq \varnothing, f(A)}} \min(\mathscr{U}|_{f(A)}(B). \mathscr{U}|_{f(A)}(f(A) - B) = \beta$.

设 $\beta < t$，则存在 $B_0 \subseteq f(A)$，$B_0 \notin \{\varnothing, f(A)\}$，使得

$$1 - \mathscr{U}|_{f(A)}(B_0) \leqslant t \text{ 和 } 1 - \mathscr{U}|_{f(A)}(f(A) - B_0) \leqslant t.$$

所以存在 $F_1, F_2 \subseteq Y \sim f(A)$，使得

$$1 - \mathscr{U}(B_0 \cup F_1) \leqslant t \text{ 和 } 1 - \mathscr{U}(f(A) - B_0 \cup F_2) \leqslant t.$$

如果 $S_1 = 1 - \mathscr{U}(B_0 \cup F_1) + \mathscr{T}(f^{-1}(B_0)) - \min(\mathscr{T}|_A(f^{-1}(B_0) \cap A), \mathscr{T}|_A(A - f^{-1}(B_0))) > t$ 和 $S_2 = 1 - \mathscr{U}((f(A) - B_0) \cup F_2) + \mathscr{T}(f^{-1}(f(A) = B_0)) - \min(\mathscr{T}|_A(f^{-1}(f(A) - B_0) \cap A), \mathscr{T}|_A(A - f^{-1}(f(A) - B_0))) > t$，则 $\mathscr{T}(f^{-1}(B_0)) - \min(\mathscr{T}|_A(f^{-1}(B_0) \cap A), \mathscr{T}|_A(A - f^{-1}(B_0)) > 0$.

所以我们得到

$$\begin{aligned} &\mathscr{T}|_A(f^{-1}(B_0) \cap A) > \mathscr{T}|_A(A - f^{-1}(B_0)) \\ &= \mathscr{T}|_A(f^{-1}(f(A) - B_0) \cap A) > \\ &\mathscr{T}|_A(A - f^{-1}(f(A) - B_0)) \\ &= \mathscr{T}|_A(f^{-1}(B_0) \cap A) \qquad \text{矛盾!} \end{aligned}$$

2.7 **定义** 设 $(X, \mathscr{T})$ 是不分明化拓扑空间，一元不分明谓词 $K_x \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 称为 X 的不分明连通区，如果对任何 $x \in A \in \mathscr{P}(X)$，

$$K_x(A) := ((x \in A) \wedge I(A)) \mathbin{\&} (\forall B)((x \in B) \wedge I(B) \rightarrow B \subseteq A).$$

2.8 **定理** 设 $(X, \mathscr{T})$ 是不分明化拓扑空间，A、$B \in \mathscr{P}(X)$，则

$\models K_x(A)\wedge K_x(B)\to A\equiv B.$

证明 如果$[K_x(A)\wedge K_x(B)]>\lambda>0$，则

$$\max(0,[K_x(A)]+[K_x(B)]-1)>\lambda.$$

由定义知

$[K_x(A)]=\max(0.[I(A)]+\inf\limits_{x\in B'}[I(B')\to(B'\subseteq A)]-1)$

$[K_x(B)]=\max(0.[I(B)]+\inf\limits_{x\in A'}[I(A')\to(A'\subseteq B)]-1)$

因为$[K_x(A)]\neq 0,[K_x(B)]\neq 0$(否则命题成立)，所以$[I(A)]+\inf\limits_{x\in B'}[I(B')\to(B'\subseteq A)]-1+[I(B)]+\inf\limits_{x\in A'}[I(A')\to(A'\subseteq B)]-1-1>\lambda.$

因此对于取$B'=B,A'=A$时，有

$[I(A)]+[I(B)\to(B\subseteq A)]-1+[I(B)]+[I(A)\to(A\subseteq B)]-1-1>\lambda$

$[I(A)]+1-[I(B)]+[B\subseteq A]-1+[I(B)]+1-[I(A)]+[A\subseteq B]-1-1>\lambda$

即$[B\subseteq A]+[A\subseteq B]-1>\lambda$，因此

$[A\equiv B]=[(B\subseteq A)\wedge(A\subseteq B)]\geqslant[B\subseteq A]+[A\subseteq B]-1>\lambda.$ □

2.9 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，$A\in\mathscr{P}(X)$，则

$\models K_x(A)\to A\in\mathscr{F}.$

证明 如果$[K_x(A)]>\lambda$，则$\min([I(A)],\inf\limits_{\substack{B\cap A^C\neq\varnothing\\ x\in B}}(1-[I(B)])\geqslant[K_x(A)]>\lambda$. 因此，对任何$B\in\mathscr{P}(X),B\cap A^C\neq\varnothing,x\in B$，就有$1-[I(B)]>\lambda$，即$\sup\limits_{\substack{G\cup H=B,G\cap H=\varnothing\\ G.H\neq\varnothing}}\min(\mathscr{T}(G),\mathscr{T}(H))>\lambda$. 故而存在$G,H$，使得$G\cup H=B,G\cap H=\varnothing,G,H\neq\varnothing$，且$\mathscr{T}(G)>\lambda,\mathscr{T}(H)>\lambda$. 现取$B=\{x,y\}$，其中$y\in A^C$，显然$x\neq y$. 令$G=\{x\},H=\{y\}$，则只有这样的$G$和$H$满足上述条件. 因此，对任何$y\in A^C$，有$\mathscr{T}(\{y\})>\lambda$，从而$\mathscr{T}(A^C)=\mathscr{T}(\bigcup\limits_{y\in A^C}\{y\})\geqslant\inf\limits_{y\in A^C}\mathscr{T}(\{y\})\geqslant\lambda$，即$[A\in\mathscr{F}]\geqslant\lambda$.

2.10 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，A、$B\in\mathscr{P}(X)$，则

$\models K_x(A)\wedge(B\equiv\bar{A})\to K_x(B)$.

证明 如果$B\not\supseteq A$，则$[K_x(A)\wedge(B\equiv\bar{A})]\leqslant[B\equiv\bar{A}]=0\leqslant[K_x(B)]$.

现在我们设$B\supseteq A$且$[K_x(B)]<t$，若能证到$[K_x(A)\wedge(B\equiv\bar{A})]\leqslant t$，那么此命题的证明就完成了．事实上，由$[K_x(B)]>t$，即由定义得到

$\max(0.[I(B)]-\sup_{\substack{C\cap B^C\neq\varnothing\\ x\in C}}[I(C)])<t$. 则存在$C\cap B^C\neq\varnothing$，$x\in C$，使得$[I(B)]-[I(C)]\leqslant t$，即$[I(B)]\leqslant t+[I(C)]$. 下面我们分两种情况来讨论：

情况Ⅰ：$[I(A)]\leqslant[I(B)]$，则$[I(A)]-\sup_{\substack{D\cap A^C\neq\varnothing\\ x\in D}}[I(D)]\leqslant[I(B)]-[I(C)]\leqslant t$. 所以

$$[K_x(A)\wedge(B\equiv\bar{A})]\leqslant[K_x(A)]$$
$$=\max(0,[I(A)]-\sup_{\substack{D\cap A^C\neq\varnothing\\ x\in D}}[I(D)])$$
$$\leqslant\max(0.[I(B)]-[I(C)])\leqslant t.$$

情况Ⅱ：$[I(A)]>[I(C)]$，由2.4定理$\models I(A)\wedge(B\equiv\bar{A})\to I(B)$，我们得到$[B\equiv\bar{A}]\leqslant[I(B)]$，因而

$$[I(A)]-\sup_{\substack{D\cap A^C\neq\varnothing\\ x\in D}}[I(D)]+[B\equiv\bar{A}]-1$$
$$\leqslant[I(B)]+[I(A)]-[I(C)]-1\leqslant t.$$ 所以

$$[K_x(A)\wedge(B\equiv\bar{A})]=\max(0.[K_x(A)+[B\equiv\bar{A}]-1)\leqslant t.$$

□

§3 局部连通空间

3.1 **定义** 设Σ是一不分明化拓扑空间类．一元不分明谓

词 $CI\in\mathscr{F}(\Sigma)$称为不分明局部连通的，若
$CI(X,\mathscr{T}):=(\forall x)(\forall A)(A\in N_x\rightarrow(\exists B)((B\subseteq A)\wedge I(B)\wedge(B\in N_x)))$.
即，若$(X,\mathscr{T})$是局部连通的，则

$$[CI(X,\mathscr{T})]=\inf_{x\in X}\inf_{A\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-N_x(A)+\sup_{B\subseteq A}([I(B)]\wedge N_x(B))].$$

3.2 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，则

$$\models(I(X,\mathscr{T})\rightarrow(\forall A)(A\in\mathscr{T}\rightarrow(\forall B)((B\subseteq A)\wedge(K_x(B)\rightarrow(B\in\mathscr{T})).$$

证明 设 $\alpha=[CI(X,\mathscr{T})]$，$\beta=[(\forall A)(A\in\mathscr{T}\rightarrow(\forall B)((B\subseteq A)\wedge(K_x(B)\rightarrow(B\in\mathscr{T})))]=\inf\limits_{A\subseteq X}\min(1,1-\mathscr{T}(A)+\inf\limits_{B\subseteq A}\min(1,1-[K_x(B)]+\mathscr{T}(B)))$. 假设 $\alpha>t$，往证 $\beta\geqslant t$. 这只需证明对$\forall A\subseteq X$ 及$\forall B\subseteq A$，都有 $\delta=1-\mathscr{T}(A)+1-[K_x(B)]+\mathscr{T}(B)\geqslant t$. 若$[K_x(B)]=0$，则结论显然成立．设$[K_x(B)]>0$. 对$\forall\varepsilon>0$，存在$x\in B$ 使得$\mathscr{T}(B)\geqslant N_x(B)-\varepsilon$. 因 $\alpha>t$，所以存在 $B_x\subseteq A$，使得 $1-N_x(A)+[I(B_x)]\wedge N_x(B)\geqslant t$.

若 $x\notin B_x$，则 $1-N_x(A)\geqslant t$，因而 $\delta\geqslant1-\mathscr{T}(A)\geqslant1-N_x(A)\geqslant t$.

若 $x\in B_x$，则分两种情形讨论．

情形 1：$B\supset B_x$. 则 $\delta=1-\mathscr{T}(A)+1-[K_x(B)]+\mathscr{T}(B)\geqslant1-N_x(A)+1-[K_x(B)]+N_x(B_x)-\varepsilon\geqslant1-N_x(A)+1-[K_x(B)]+N_x(B_x)-\varepsilon\geqslant t-\varepsilon$.

情形 2：$B\not\supset B_x$，则$[I(B\cup B_x)]\geqslant[I(B)]\wedge[I(B_x)]$，所以 $\delta=1-\mathscr{T}(A)+1-[K_x(B)]+\mathscr{T}(B)=1-\mathscr{T}(A)+1-[I(B)]+\sup\limits_{\substack{D\cap B^C\neq\emptyset\\ x\in D}}[I(D)]+\mathscr{T}(B)\geqslant1-N_x(A)+1-[I(B)]+[I(B)]\wedge[I(B_x)]+N_x(B)-\varepsilon\geqslant t-\varepsilon$.

总上有 $\delta\geqslant t-\varepsilon$. 由 ε 的任意性，$\delta\geqslant t$. 即 $\beta\geqslant t$.□

3.3 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，则$\models(I(X,\mathscr{T})\to(\forall x)(\forall A)(A\in N_x\to(\forall B)((B\subseteq A)\wedge(K_x(B)\to(B\in N_x)))$

证明 证明过程完全类似于3.2定理，略去．

3.4 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，则$\models(\forall x)(\forall A)(A\in N_x\to(\forall B)((B\subseteq A)\wedge(K_x(B)\to(B\in N_x)))\wedge(A_0\in\mathscr{T})\to(\forall D)((D\subseteq A_0)\wedge(K_x(D)\to D\in\mathscr{T})$.

证明 设 $\alpha=\max(0.\mathscr{T}(A_0)-1+\inf_{x\in X}\inf_{A\subseteq X}\min(1.1-N_x(A)+\inf_{B\subseteq A}\min(1.1-[K_x(B)]+N_x(B))))$.

$$\beta=[(\forall D)((D\subseteq A_0)\wedge(K_x(D))\to(D\in\mathscr{T})]$$
$$=\inf_{D\subseteq A_0}\min(1.1-[K_x(D)]+\mathscr{T}(D)).$$

假设$\alpha>t$，则对$\forall x\in X$, $\forall A\subseteq X, B\subseteq A$，有

$$\mathscr{T}(A_0)-1+1-N_x(A)+1-[K_x(B)]+N_x(B)>t.(*)$$

往证$\beta\geqslant t$，即对$\forall D\subseteq A_0, 1-[K_x(D)]+\mathscr{T}(D)\geqslant t$. 若存在$D\subseteq A_0$使得$1-[K_x(D)]+\mathscr{T}(D)<t$，则存在$y\in D$，使$N_y(D)\leqslant t-1+[K_x(D)]=t-1+[I(D)]-\sup_{\substack{E\cap D^c\neq\varnothing\\ x\in E}}[I(E)]$，又从$(*)$得到$\mathscr{T}(A_0)-N_y(A_0)+1+N_y(D)-[K_x(D)]>t$，即$\mathscr{T}(A_0)-N_y(A_0)+1+N_y(D)-[I(D)]+\sup_{\substack{E\cap D^c\neq\varnothing\\ x\in E}}[I(E)]>t$，所以$t-1+[I(D)]-\sup_{\substack{E\cap D^c\neq\varnothing\\ x\in E}}[I(E)]+\mathscr{T}(A_0)+1-N_y(A_0)-[I(D)]+\sup_{\substack{E\cap D^c\neq\varnothing\\ x\in E}}[I(E)]>t$，即$t\geqslant t+\mathscr{T}(A_0)-N_y(A_0)-N_y(A_0)>t$，这是矛盾的．因此我们得到$\inf_{D\subseteq A_0}\min(1.1-[K_x(D)]+\mathscr{T}(D))\geqslant t$.

□

3.5 **定理** 设$\{(X_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$是一不分明化拓扑空间簇，$(\times_{a\in A}X_a,\times_{a\in A}\mathscr{T}_a)$是其积空间，则

$$\models I(\times_{a\in A}X_a,\times_{a\in A}\mathscr{T}_a)\leftrightarrow(\forall a)((a\in A)\to I(X_a,\mathscr{T}_a)).$$

证明 因为$[(\forall a)((a\in A)\to C(P_a)]=1$，所以$\models I(\bigtimes_{a\in A}X_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)\to(\forall a)((a\in A)\to I(X_a,\mathscr{T}_a))$是显然成立的．下面证其相反的成立．任取定$b=(b_a)\in\bigtimes_{a\in A}X_a$，令$Y=\{x\in\bigtimes_{a\in A}X_a:|\{a\in A:x_a\neq b_a\}|<\aleph_0\}$，记$X=\bigtimes_{a\in A}X_a$，则$[\overline{Y}\equiv X]=1$. 事实上，$[\overline{Y}\equiv X]=\inf_{x\in X}(1-|\overline{Y}(x)-X(x)|)=\inf_{x\in X}\overline{Y}(x)$. 而$\inf_{x\in X}\overline{Y}(x)=\inf_{x\in Y^C}(1-N_x(Y^C))=\inf_{x\in Y^C}(1-\sup_{x\in B\subseteq Y^C}\mathscr{T}(B))=1-\sup_{x\in B\subset Y^C}\varphi^{\cap}(B)=1-\sup_{x\in B\subseteq Y^C}\sup_{\bigcup\mathscr{A}=B}\inf_{C\in\mathscr{A}}\varphi^{\cap}(C)$，其中$\varphi,\varphi^{\cap}$分别表示$\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a$的子基和基．任意$B\in\mathscr{P}(X)$且$x\in B\subseteq Y^C$，必有$\sup_{\bigcup\mathscr{A}=B}\inf_{C\in\mathscr{A}}\varphi^{\cap}(C)=0$，否则若$\sup_{\bigcup\mathscr{A}=B}\inf_{C\in\mathscr{A}}\varphi^{\cap}(C)>0$. 则存在$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$使得$\bigcup\mathscr{A}=B$且任意$C\in\mathscr{A}$，$\varphi^{\cap}(C)>0$，从而存在$\mathscr{B}_C\subseteq\mathscr{P}(X)$使得$\bigcap\mathscr{B}_C=C$以及对任意$D\in\mathscr{B}_C$存在$b(D)\in A$和$U_{b(D)}\in(X_{b(D)})$使得$P^{-1}_{b(D)}(U_{b(D)})=D$，因而$\bigcap_{D\in\mathscr{B}_C}P^{-1}_{b(D)}(U_{b(D)})=C$而$C=\bigcup\mathscr{A}=B\subseteq Y^C$. 现在取$y_{b(D)}\in U_{b(D)}$其中$D\in\mathscr{B}_C$，取$x_s\in X_s$当$s\in A\setminus\{b(D):D\in\mathscr{B}_C\}$，则$\bigtimes_{D\in\mathscr{B}_C}\{y_{b(D)}\}\times\bigtimes_{s\in A\setminus\{b(D):D\in\mathscr{B}_C\}}\{x_s\}\subseteq Y$，这是一个矛盾，可见$\sup_{\bigcup\mathscr{A}=B}\inf_{C\in\mathscr{A}}\varphi^{\cap}(C)=0$. 从而$\sup_{x\in B\subseteq Y^C}\varphi^{\cap}(B)=0$，所以$[\overline{Y}\equiv X]=1$.

如果我们能证到$[(\forall a)((a\in A\to I(X_a)]\leqslant[I(Y)]$则

$[(\forall a)((a\in A)\to I(X_a)]\leqslant[I(Y)]=[I(Y)]\wedge[\overline{Y}\equiv X]\leqslant[I(X)]$. 从而完成证明．任取$y\in Y$，则存在$\{S_1^y,\cdots,S_{k(y)}^y\}\subseteq A$使得对$\forall S\in A\setminus\{S_1^y,\cdots,S_{k(y)}^y\}$，$y_s=b_s$. 令

$$B_1^y=X_{S_1^y}\times\{y_{S_2^y}\times\cdots\times y_{S_{k(y)}^y}\}\times\bigtimes_{S\neq S_i^y}\{b_s\}$$

$$B_2^y=\{b_{S_1^y}\}\times X_{S_2^y}\times\{y_{S_3^y}\}\times\cdots\times\{y_{S_{k(y)}^y}\}\times\bigtimes_{S\neq S_i^y}\{b_s\}$$

$$B_{k(y)-1}^y=\{b_{S_1^y}\}\times\{b_{S_2^y}\}\times\cdots\times\{b_{S_{k(y)-2}^y}\}\times X_{S_{k(y)-1}^y}\times\bigtimes_{S\neq S_i^y}\{b_s\}$$

$$B^y_{k(y)}=\{b_{S^y_1}\}\times\cdots\times\{b_{S^y_{k(y)-1}}\}\times X_{S^y_{k(y)}}\times\bigtimes_{S\neq S^y_i}\{b_s\}.$$

根据 4.2 引理我们得到对 $\forall y\in Y$, $\forall i\leqslant k(y)$, $\models H(B^y_i, X_{S^y_i})$, 同时也知道对 $\forall i<k(y)$, $B^y_i\cap B^y_{i+1}\neq\varnothing$, 所以对 $\forall y\in Y$ 和 $\forall i\leqslant k(y)$. 有$[I(B^y_i)]=[I(X_{S^y_i})]$. 所以

$[(\forall a)((a\in A)\rightarrow I(X_a)]=[(\forall a)((a\in A)\rightarrow I(X_a)]\wedge(\forall y\in Y)(\forall i\leqslant k(y)H(B^y_i,X_{S^y_i})\wedge(\forall i<k(y))(B^y_i\cap B^y_{i+1}\neq\varnothing))]\leqslant[(\forall y\in Y)(\forall i\leqslant k(y))I(B^y_i)\wedge(\forall i\leqslant k(y))$

$(B^y_i\cap B^y_{i+1}\neq\varnothing)\wedge(\forall y\in Y)I(\bigcup_{i\leqslant k(y)}B^y_i)]\leqslant I(\bigcup_{y\in Y}\bigcup_{i\leqslant k(y)}B^y_i)=[I(Y)]\wedge[\overline{Y}\equiv X]\leqslant[I(X)]=[I(\bigtimes_{a\in A}X_a)]$.

这是因为对任意 $y\in Y$ 有$\{y,b\}\subseteq\bigcup_{i\leqslant k(y)}B^y_i\subseteq Y$.□

3.6 **推论** 设$\{(X_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$是不分明化拓扑空间簇, 对 $\forall a\in A$, $Y_a\in\mathscr{P}(X_a)$, 则

$$\models I(\bigtimes_{a\in A}Y_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a})\leftrightarrow(\forall a)((a\in A)\rightarrow I(Y_a,\mathscr{T}_a|_{Y_a})).$$

证明 由 3.3 定理得到

$$\models I(\bigtimes_{a\in A}Y_a,\bigtimes_{a\in A}(\mathscr{T}_a|_{Y_a}))\leftrightarrow(\forall a)((a\in A)\rightarrow I(Y_a,\mathscr{T}_a|_{Y_a})).$$

令 $\psi=\int_{a\in A,u\in\mathscr{P}(Y_a)}\mathscr{T}_a|_{Y_a}(u)/P_a^{-1}|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a}(u)$, 则 ψ 是$(\bigtimes_{a\in A}Y_a,\bigtimes_{a\in A}(\mathscr{T}_a|_{Y_a}))$的子基. 然而我们知道 $\varphi|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a}$是$(\bigtimes_{a\in A}Y_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a})$的子基, 所以如果我们能证得 $\psi=\varphi|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a}$, 则我们得到$(\bigtimes_{a\in A}Y_a,\bigtimes_{a\in A}(\mathscr{T}_a|_{Y_a}))=(\bigtimes_{a\in A}Y_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a})$. 事实上, 对 $\forall Z\subseteq\bigtimes_{a\in A}Y_a$, 我们分两种情况来考虑. 情形 1, 存在 $b\in A$ 和 $w\in\mathscr{P}(Y_b)$使得 $Z=P_b^{-1}|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a}(w)$, 则 $\psi(z)=\psi(P_b^{-1}|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a}(w))=\mathscr{T}_b|_{Y_b}(w)=\sup_{w=u\cap Y_b}\mathscr{T}_b(u)=\sup_{P_b^{-1}|_{\bigtimes_{a\in A}Y_a}(w)=P_b^{-1}(u)\cap\bigtimes_{a\in A}Y_b}\mathscr{T}_b(u)=$

$$\sup_{P_b^{-1}|_{\times_{a\in A}Y_a}(w)=B\cap\times_{b\in A}Y_b} \varphi(B) = \varphi|_{\times_{a\in A}Y_a}(P_b^{-1}|_{\times_{a\in A}Y_a})(w) = \varphi$$

$|_{\times_{a\in A}Y_a}(z)$. 情形2, z 不能表示为$P_a^{-1}|_{\times_{a\in A}Y_a}(w)$的形式, $a\in A$, $w\in\mathscr{P}(Y_a)$. 这时 $\psi(z)=0$. $\varphi|_{\times_{a\in A}Y_a}(z)=\sup_{z=B\cap\times_{a\in A}Y_a}\varphi(B)=0$. 因为 B 也不能被表示为$P_a^{-1}(u)$的形式, $a\in A$, $u\in\mathscr{P}(X_a)$. 总之 $\psi=\varphi|_{\times_{a\in A}}Y_a$, 所以

$$\times_{a\in A}(\mathscr{T}_a|_{Y_a}) = \psi^{\cap} = (\varphi|_{\times_{a\in A}}Y_a)^{\cap} = (\psi^{\cap})|_{\times_{a\in A}}Y_a = \times_{a\in A}\mathscr{T}_a$$

$|_{\times_{a\in A}}Y_a$. □

3.7 定理 设$(\times_{a\in A}X_a, \times_{a\in A}\mathscr{T}_a)$是不分明化拓扑空间簇$\{(X_a, \mathscr{T}_a): a\in A\}$的积空间, 则

$$\models CI(\times_{a\in A}X_a, \times_{a\in A}\mathscr{T}_a)\leftrightarrow(\forall a)((a\in A)\rightarrow CI(X_a,\mathscr{T}_a))$$
$$\wedge(\exists\Lambda)((\Lambda\subseteq A)\wedge(\forall b)((b\in A-\Lambda)\rightarrow I(X_b))).$$

证明 令 $X=\times_{a\in A}X_a$. 由定义

$$[CI(\times_{a\in A}X_a, \times_{a\in A}\mathscr{T}_a)] = \inf_{x\in X}\inf_{Y\subseteq X}\min(1.\ 1-N_x(Y)+\sup_{B\subseteq Y}[I(B)]\wedge N_x(B)))=\alpha$$

$$\beta=[(\forall a)((a\in A)\rightarrow CI(X_a,\mathscr{T}_a))] = \inf_{a\in A}\inf_{x_a\in X_a}\inf_{Y_a\subseteq X_a}\min(1, 1-N_{x_a}(Y_a)+\sup_{B_a\subseteq Y_a}[I(B_a)]\wedge N_{x_a}(B_a)),$$

$$\gamma=[(\exists\Lambda)((\Lambda\subseteq A)\wedge(\forall b)((b\in A-\Lambda)\rightarrow I(X_v)))] = \sup_{\Lambda\subseteq A}\inf_{b\in A-\Lambda}[I(X_b)]$$

首先我们证明 $\alpha\leqslant\beta\wedge\gamma$. 我们逐个证明 $\alpha\leqslant\beta$ 和$\alpha\leqslant\gamma$. 设 $\alpha>t$, 对任意 $a\in A$ 和$x_a\in X_a$ 以及 $Y_a\subseteq X_a$, 取 $x\in P_a^{-1}(\{x_a\})$, $Y=P_a^{-1}(Y_a)$, 则存在 $B\subseteq Y$, 使得 $1-N_x(Y)+[I(B)]\wedge N_x(B)\geqslant t$. 根据 3.6 推论和第三章 1.9 与 1.10 引理, 得到:

$$1-N_{x_a}(Y_a)+\sup_{B_a\subseteq Y_a}[I(B_a)]\wedge N_{x_a}(B_a)\geqslant 1-N_x(P_a^{-1}(Y_a))$$
$$+[I(P_a(B))]\wedge N_{x_a}(P_a(B)]\geqslant 1-N_x(Y)+[I(B)]\wedge N_x(B)$$

$\geqslant t$，所以 $\alpha \leqslant \beta$ 成立．

由于 $\alpha > t$，则对 $\forall x \in X, 1 - N_x(X) + \sup_{B \subseteq X}[I(B)] \wedge N_x(B) = \sup_{B \subseteq X}[I(B)] \wedge N_x(B) > t$. 因而存在 $B \subseteq X$ 以及 $x \in C \subseteq B$ 使得 $[I(B)] > t$ 和 $(\bigtimes_{a \in A} \mathscr{T}_a)(C) > t$. 由 $(\bigtimes_{a \in A} \mathscr{T}_a)(C) > t$，则存在 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ 和 $\mathscr{A}_D \subseteq \mathscr{P}(X)$，对任意 $D \in \mathscr{B}$ 和 $F \in \mathscr{A}_D$，都存在 $a(F) \in A$ 和 $U_{a(F)} \in \mathscr{P}(X_{a(F)})$，使得 $F = P_{a(F)}^{-1}(U_{a(F)})$，$\mathscr{A}_0 = \bigcap_{\substack{F \in \mathscr{A}_D \\ \mathscr{A}_D \subseteq \mathscr{P}(X)}} P_{a(F)}^{-1}(U_{a(F)}) = D$，$C = \bigcup \mathscr{B} = \bigcup_{D \in \mathscr{B}} \bigcap_{F \in \mathscr{A}_D} P_{a(F)}^{-1}(U_{a(F)}) \subseteq B$ 和 $\inf_{F \in \mathscr{A}_D} \mathscr{T}_{a(F)}(U_{a(F)}) > t$ 对某些 $D \in \mathscr{B}$，现在我们取 $\Lambda = \{a(F) \mid F \in \mathscr{A}_D\}$，则 $|\Lambda| \leqslant |\mathscr{A}_D| < \mathscr{S}_0$。且对任意 $b \in A - \Lambda$，$P_b(B) \supseteq P_b(\bigcap_{\mathscr{F} \in \mathscr{A}_D} P_{a(F)}^{-1}(U_{a(F)})) = X_b$. 所以

$$[I(X_b)] = [I(P_b(B))] \geqslant [I(B)] > t. \text{因而 } \gamma \geqslant t.$$

下一步我们来证 $\alpha \geqslant \beta \wedge \gamma$，设 $\beta \wedge \gamma > t$，则 $\beta > t$ 和 $\gamma > t$，存在 $\Lambda \subseteq A$ 使得对任意 $b \in A - \Lambda$，$[I(X_b)] \geqslant t$. 对任意 $x \in X$ 以及 $Y \in \mathscr{P}(X)$，如果 $N_x(Y) = 0$，则 $\alpha > t$ 显然成立．如果 $N_x(A) > 0$，由 $\sup_{x \in C \subseteq Y} \varphi^{\cap}(C) \geqslant N_x(Y) > 0$，存在 $\mathscr{A} \subseteq X$，使得 $\bigcap \mathscr{A} = C \subseteq Y$ 且对任意 $B \in \mathscr{A}$，$\varphi(B) \geqslant N_x(Y) > 0$，即对任意 $B \in \mathscr{A}$ 存在 $a_B \in A$ 以及 $U_{a_B} \in \mathscr{P}(X_{a_B})$，使得 $P_{a_B}^{-1}(U_{a_B}) = B$ 和 $C = \bigcap_{B \in \mathscr{A}} P_{a_B}^{-1}(U_{a_B}) \subseteq Y$. 由 $\beta > t$ 得到对任意 $B \in \mathscr{A}$ 都存在 $B_{a_B} \subseteq P_{a_B}(Y)$ 使得 $1 - N_{x_a}(P_a(A)) + [I(B_{a_B})] \wedge N_{x_{a_B}}(B_{a_B}) \geqslant t$. 记 $D = \{a_B \mid B \in \mathscr{A}\}$，则当 $a \in \Lambda \setminus D$ 时，存在 $B_a \subseteq P_a(Y) = X_a$ 使得 $1 - N_{x_a}(P_a(A)) + [I(B_a)] \wedge N_{x_a}(B_a) \geqslant t$. 我们令

$G = \bigtimes_{b \in D \cup (\Lambda \setminus D)} B_b \times \bigtimes_{b \in A \setminus D \cup \Lambda} X_b$，则 $1 - N_x(Y) + [I(G)] \geqslant 1 - N_x(Y) + \inf_{b \in D \cup \Lambda}[I(B_b)] \wedge t \geqslant 1 - N_x(Y) + t \wedge \inf_{b \in D \cup \Lambda}(t + N_{x_b}(P_b(Y)) - 1) = t + \inf_{b \in D \cup \Lambda}(N_{x_b}(P_b(A)) - N_x(A)) \geqslant t$.

$$1 - N_x(A) + N_x(G) \geqslant 1 - N_x(A) + \inf_{b \in D \cup \wedge} N_x(P_b^{-1}(B_b)) \geqslant 1 - N_x(A) + \inf_{b \in D \cup \wedge} N_{x_b}(B_b) \geqslant 1 - N_x(A) + \inf_{b \in D \cup \wedge} (t - 1 + N_{x_b}(P_b(A)) = t + \inf_{b \in D \cup \wedge} (N_{x_b}(P_b(A)) - N_x(A)) \geqslant t.$$

可见 $\alpha \geqslant t$，从而 $\alpha \geqslant \beta \wedge \gamma$. 综上所述 $\alpha = \beta \wedge \gamma$. □

第五章　不分明化拓扑空间中的分离性公理

§1　分离性公理

1.1　**定义**　设Σ是不分明化拓扑空间类，一元不分明谓词$T_i \in \mathscr{F}(\Sigma)$，称为不分明$T_i$分离性(其中$T_2$、$T_3$、$T_4$又分别称为Hausdorff、正则、正规性)($i=0,1,\cdots,4$)分别定义为：

$T_0(X,\mathscr{T}):=(\forall x)(\forall y)((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(x\neq y)$
$\rightarrow(\exists A)(((A\in N_x)\wedge(y\notin A))\vee((A\in N_y)\wedge(x\notin A))))$,

$T_1(X,\mathscr{T}):=(\forall x)(\forall y)((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(x\neq y)$
$\rightarrow(\exists A)(\exists B)((A\in N_x)\wedge(B\in N_y)\wedge(y\notin A)\wedge(x\notin B)))$,

$T_2(X,\mathscr{T}):=(\forall x)(\forall y)((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(x\neq y)$
$\rightarrow(\exists A)(\exists B)((A\in N_x)\wedge(B\in N_y)\wedge(A\cap B=\varnothing)))$

$T_3(X,\mathscr{T}):(\forall x)(\forall D)((x\in X)\wedge(D\in\mathscr{F})\wedge(x\notin D)$
$\rightarrow(\exists A)(\exists B)((A\in N_x)\wedge(B\in\mathscr{T})\wedge(B\supseteq D)\wedge(A\cap B=\varnothing)))$,

$T_4(X,\mathscr{T}):=(\forall A)(\forall B)((A\in\mathscr{F})\wedge(B\in\mathscr{F})\wedge(A\cap B=\varnothing)$
$\rightarrow(\exists G)(\exists H)((G\in\mathscr{T})\wedge(H\in\mathscr{T})\wedge(A\subseteq G)\wedge(B\subseteq H)\wedge(G\cap H=\varnothing)))$

由定义，下面的结果是明显的：

$\vDash T_1(X,\mathscr{T}) \to T_0(X,\mathscr{T})$, $\quad \vDash T_2(X,\mathscr{T}) \to T_1(X,\mathscr{T})$

1.2 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，则$\vDash T_0(X,\mathscr{T}) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in X) \wedge (y \in X) \wedge (x \neq y) \to \neg (x \in \overline{\{y\}}) \vee \neg (y \in \overline{\{x\}}))$

证明 $[T_0(X,\mathscr{T})] = \inf\limits_{x \neq y} \max(\sup\limits_{y \notin A} N_x(A), \sup\limits_{x \notin A} N_y(A)) = \inf\limits_{x \neq y} \max(N_x(X - \{y\}), N_y(X - \{x\})) = \inf\limits_{x \neq y} \max(N_x \{y\}^c), N_y(\{x\}^c)) = \inf\limits_{x \neq y} \max(1 - \overline{\{y\}}(x), 1 - \overline{\{x\}}(y)) = [\forall x \forall y((x \in X) \wedge (y \in X) \wedge (x \neq y) \to \neg (x \in \overline{\{y\}}) \wedge \neg (y \in \overline{\{x\}})))$ □

1.3 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，则$\vDash T_1(X,\mathscr{T}) \leftrightarrow \forall x(\{x\} \in \mathscr{F})$.

证明 对任意x_1, x_2且$x \neq x_2$，

$[\forall x(\{x\} \in \mathscr{F})] = \inf\limits_{x \in X} \mathscr{F}(\{x\}) = \inf\limits_{x \in X} \mathscr{T}(\{x\}^c) = \inf\limits_{x \in X} \mathscr{T}(X - \{x\})$

$= \inf\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in X - \{x\}} N_y(X - \{x\}) \leqslant \inf\limits_{y \in X - \{x_2\}} N_y(X - \{x_2\}) \leqslant N_{x_1}(X - \{x_2\}) \leqslant \sup\limits_{x_2 \notin A} N_{x_1}(A)$

同样我们可以证明

$[\forall x(\{x\} \in \mathscr{F})] \leqslant \sup\limits_{x_1 \notin B} N_{x_2}(B)$.

$[\forall x(\{x\} \in \mathscr{F})] \leqslant \inf\limits_{x_1 \neq x_2} \min(\sup\limits_{x_2 \notin A} N_{x_1}(A), \sup\limits_{x_1 \notin B} N_{x_2}(B))$

$= \inf\limits_{x_1 \neq x_2} \sup\limits_{x_1 \notin B, x_2 \notin A} \min(N_{x_1}(A), N_{x_2}(B)) = [T_1(X,\mathscr{T})]$

另一方面

$[T_1(X,\mathscr{T})] = \inf\limits_{x_1 \neq x_2} \min(\sup\limits_{x_2 \notin A} N_{x_1}(A)) \sup\limits_{x_2 \notin B} N_{x_2}(B)) = \inf\limits_{x_1 \neq x_2} \min (N_{x_1}(X - \{x_2\}), N_{x_2}(X - \{x_1\})) \leqslant \inf\limits_{x_1 \neq x_2} N_{x_1}(X - \{x_2\}) = \inf\limits_{x_2 \in X} \inf\limits_{x_1 \in X - \{x_2\}} N_{x_1}(X - \{x_2\}) = \inf\limits_{x_2 \in X} \mathscr{T}(X - \{x_2\}) = \inf\limits_{x \in X} \mathscr{T}(\{x\}^c) = \inf\limits_{x \in X} \mathscr{F}(\{x\}) = [\forall x(\{x\} \in \mathscr{F})]$

因此，$[T_1(X,\mathscr{T})]=[\forall x(\{x\}\in\mathscr{F})]$. □

1.4　**定义**　设 N_x 是 x 的不分明化邻域系 .$\mathscr{B}_x\subseteq N_x$ 称为 x 的局部基，定义为：

$$\vDash A\in N_x\leftrightarrow\exists B((B\in\mathscr{B}_x)\wedge(x\in B\subseteq A)).$$

即，若 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的一个局部基，则对 $\forall A\subseteq X$,

$$N_x(A)=\sup_{x\in B\subseteq A}\mathscr{B}_x(B).$$

1.5　**定理**　若 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的一局部基，则

$\vDash T_1(X,\mathscr{T})\leftrightarrow\forall x\forall y((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(x\neq y)\rightarrow\exists A((A\in\mathscr{B}_x)\wedge(y\notin A)))$.

证明　对 $\forall x,y\in X$ 且 $x\neq y$,

$$\sup_{y\notin A}\mathscr{B}_x(A)\leqslant\sup_{y\notin A}N_x(A),\ \sup_{x\notin B}\mathscr{B}_y(A)\leqslant\sup_{x\notin B}N_y(B).$$

于是

$$\min(\sup_{y\notin A}\mathscr{B}_x(A),\sup_{x\notin B}\mathscr{B}_y(B))\leqslant\min(\sup_{y\notin A}N_x(A),\sup_{x\notin B}N_y(B))=\sup_{y\notin A,x\notin B}\min(N_x(A),N_y(B))$$

即，$\inf_{x\neq y}\sup_{y\in A}\mathscr{B}_x(A)\leqslant\inf_{x\neq y}\sup_{y\notin A,x\notin B}\min(N_x(A),N_y(B))=[T_1(X,\mathscr{T})]$

另一方面，对任意满足 $x\in B\subseteq X-\{y\}$ 的 B，我们有 $y\notin B$，于是 $\sup_{y\notin A}\mathscr{B}_x(A)\geqslant\mathscr{B}_x(B)$，因此根据 1.4 定义，得到

$$\sup_{y\notin A}\mathscr{B}_x(A)\geqslant\sup_{x\in B\subseteq X-\{y\}}\mathscr{B}_x(B)=N_x(X-\{y\}).$$

最后由 1.3 定理有

$$\inf_{x\neq y}\sup_{y\notin A}\mathscr{B}_x(A)\geqslant\inf_{x\neq y}N_x(X-\{y\})=\inf_{y\in X}\inf_{x\in X-\{y\}}N_x(X-\{y\})$$

$$=\inf_{y\in X}\mathscr{T}(X-\{y\})=\inf_{y\in X}\mathscr{F}\{y\})=[T_1(X,\mathscr{T})]\quad\square$$

1.6　**定理**　对任意有限集 $A\subseteq X$,

$$\vDash T_1(X,\mathscr{T})\rightarrow A'\equiv\varnothing.$$

证明　因为 $[A'\equiv\varnothing]=\inf_{x\in X}N_x(A^c\cup\{x\})$ 且

$$\inf_{y\in A^c}N_y(A^c\cup\{y\})=\inf_{y\in A^c}N_y(A^c)=\inf_{y\in A^c}N_y(X-A)=\inf_{y\in A^c}N_y$$

$(\bigcap_{x\in A}(X-\{x\}))\geqslant\inf_{y\in A^c}\inf_{x\in A}N_y(X-\{x\})\geqslant\inf_{x\neq y}N_y(X-\{x\})$.

$\inf_{y\in A}N_y(A^c\cup\{y\})=\inf_{y\in A}N_y(X-(A-\{y\}))=\inf_{y\in A}N_y(\bigcap_{x\in A-\{y\}}(X-\{x\}))\geqslant\inf_{y\in A}\inf_{x\in A-\{y\}}N_y(X-\{x\})\geqslant\inf_{x\neq y}N_y(X-\{x\})$.

因此有

$$\begin{aligned}[A'\equiv\varnothing]&=\inf_{y\in X}N_y(A^c\cup\{y\})\\&=\min(\inf_{y\in A^c}N_y(A^c\cup\{y\}),\inf_{y\in A}N_y(A^c\cup\{y\}))\\&\geqslant\inf_{x\neq y}N_y(X-\{x\})=\inf_{x\in X}\inf_{y\in X-\{y\}}N_y(X-\{x\})\\&=\inf_{x\in X}\mathscr{T}(X-\{x\})=\inf_{x\in X}\mathscr{F}(\{x\})=[T_1(X,\mathscr{T})].\quad\square\end{aligned}$$

1.7 定理 若 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的一局部基,则

$\vdash T_2(X,\mathscr{T})\leftrightarrow\forall x\forall y((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(x\neq y)\rightarrow\exists B((B\in\mathscr{B}_x)\wedge(y\notin\overline{B})))$.

证明 $[\forall x\forall y((x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(x\neq y)\rightarrow\exists B((B\in\mathscr{B}_x)\wedge(y\notin\overline{B})))]$

$=\inf_{x\neq y}\sup_{B\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{B}_x(B),N_y(B^c))=\inf_{x\neq y}\sup_{B\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{B}_x(B),\sup_{y\in C\subseteq B^c}\mathscr{B}_y(C))$

$=\inf_{x\neq y}\sup_{B\in\mathscr{T}(X)}\sup_{y\in c\subseteq B^c}\min(\mathscr{B}_x(B),\mathscr{B}_y(C))=\inf_{x\neq y}\sup_{B\cap C=\varnothing}\sup_{x\in D\subseteq B,y\in E\subseteq c}\min(\mathscr{B}_x(D),\mathscr{B}_y(E))$

$=\inf_{x\neq y}\sup_{B\cap C=\varnothing}\min(\sup_{x\in D\subseteq B}\mathscr{B}_x(D),\sup_{y\in E\subseteq C}\mathscr{B}_y(E))=\inf_{x\neq y}\sup_{B\wedge C=\varnothing}\min(N_x(B),N_y(C))$

$=[T_2(X,\mathscr{T})]$. $\square$

1.8 定理 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间,

则 $\vdash T_2(X,\mathscr{T})\leftrightarrow\forall S\forall x\forall y((S\subseteq X)\wedge(x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(s\rhd x)\wedge(s\rhd y)\rightarrow(x=y)$.

证明 $[\forall s\forall x\forall y((s\subseteq X)\wedge(x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(s\rhd x)\wedge(s\rhd y)\rightarrow x=y)]$

$$= \inf_{x\neq y}\inf_{s\subseteq X}(\sup_{s\nsubseteq A}N_x(A)\vee\sup_{s\nsubseteq B}N_y(B))$$

$$= \inf_{x\neq y}\inf_{s\subseteq X}\sup_{s\nsubseteq A}\sup_{s\nsubseteq B}(N_x(A)\vee N_y(B)).$$

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，则对任意 S，或有 $S\subsetneqq A$，或有 $S\subsetneqq B$，且 $N_x(A)\wedge N_y(B)\leqslant\sup_{s\nsubseteq A}N_x(A)$，或 $N_x(A)\wedge N_y(B)\leqslant\sup_{s\nsubseteq B}N_y(B)$.

因此，

$$\sup_{A\cap B=\varnothing}(N_x(A)\wedge N_y(B))\leqslant\inf_{S\subseteq X})\sup_{s\nsubseteq A}N_x(A)\vee\sup_{s\nsubseteq B}N_y(B)).$$

故而 $[T_2(X,\mathscr{T})]\leqslant[\forall S\forall x\forall y((S\subseteq X)\wedge(x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(s\rhd x)\wedge(s\rhd y)\to x=y)]$.

(2)首先，对任意 $x.y\in X$，且 $x\neq y$，若 $\sup_{A\cap B=\varnothing}(N_x(A)\wedge N_y(B))<t$，则只要 $A\cap B=\varnothing$，就有 $N_x(A)<t$ 或 $N_y(B)<t$. 即，当 $A\in(N_x)_t$ 和 $B\in(N_y)_t$ 时，$A\cap B=\varnothing$. 现构造网 $S^*:(N_x)_t\times(N_y)_t\to X,(A.B)\mapsto x_{(A.B)}\in A\cap B$. 则对任意 $A\in(N_x)_t$，$B\in(N_y)_t$，有 $S^*\subsetneqq A'$ 和 $S^*\subsetneqq B$。因此，如果 $S^*\subsetneqq A$ 和 $S^*\subsetneqq B$，则 $A\notin(N_x)_t$，$B\notin(N_y)_t$，即 $N_x(A)\vee N_y(B)<t$. 所以

$$\sup_{s^*\nsubseteq A}\sup_{s^*\nsubseteq B}(N_x(A)\vee N_y(B))\leqslant t.$$

而且 $\inf_{S\subseteq X}\sup_{s\nsubseteq A}\sup_{s\nsubseteq B}(N_x(A)\vee N_y(B))\leqslant t$.

其次，对任意正整数 i，存在 (x_i,y_i) 使得 $x_i\neq y_i$，且

$$\sup_{A\cap B=\varnothing}(N_{x_i}(A)\wedge N_{y_i}(B))<[T_2(X,\mathscr{T})]+1/i,$$

因此 $\inf_{S\subseteq X}\sup_{s\nsubseteq A}\sup_{s\nsubseteq B}(N_{x_i}(A)\vee N_{y_i}(B))\leqslant[T_2(X,\mathscr{T})]+1/i$.

于是我们有

$[\forall S\forall x\forall y((S\subseteq X)\wedge(x\in X)\wedge(y\in X)\wedge(s\rhd x)\wedge(s\rhd y)\to x=y]$

$$= \inf_{x\neq y}\inf_{S\subseteq X}\sup_{s\nsubseteq A}\sup_{s\nsubseteq B}(N_x(A)\vee N_y(B))\leqslant[T_2(X,\mathscr{T})].\quad\square$$

1.9 **定理** 设$\{X_a : a\in A\}$是不分明化拓扑空间簇，则
$\vDash(\forall a)((a\in A)\to T_2(X_a,\mathscr{T}_a)]\to T_2(\bigtimes_{a\in A}X_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)$.

证明，假设$\inf_{a\in A}[T_2(X_a)]>t$，则对任意$a\in A$，

$$\inf_{x_a,y_a\in X_a,x_a\neq y_a}\ \sup_{A_a,B_a\subseteq X_a,A_a\cap B_a=\varnothing}\min(N_{x_a}(A_a),N_{y_a}(B_a))>t,$$

即，若$x_a,y_a\in X_a,x_a\neq y_a$，则存在$A^\circ_a,B^\circ_a\subseteq X$使得$A_a^0\cap B_a^0=\varnothing$且$N_{x_a}(A_a^0)>t,N_{y_a}(B_a^0)>t$. 进而存在$C_a^0,D_a^0\subseteq X_a$使得$x_a\in C_a^0\subseteq A_a^0,y_a\in D_a^0\subseteq B_a^0,C_a^0\cap D_a^0=\varnothing,\mathscr{T}_a(C_a^0)>t$且$\mathscr{T}_a(D_a^0)>t$. 现欲证明$[T_2(\bigtimes_{a\in A}X_a)]>t$，只需证明对任意的$x,y\in\bigtimes_{a\in A}X_a$且$x\neq y$，

$$\sup_{A,B\subseteq\bigtimes_{a\in A}X_a,A\cap B=\varnothing}\min(N_x(A),N_y(B))>t.$$

如果$x\neq y$，则存在$b\in A$使得$x_b\neq y_b$，且进而存在$C_b^0,D_b^0\subseteq X_b$使得$x_b\in C_b^0,y_b\in D_b^0,C_b^0\cap D_b^0=\varnothing$，且$\mathscr{T}_b(C_b^0)>t,\mathscr{T}_b(D_b^0)>t$。因为$P_b^{-1}(C_b^0)\cap P_b^{-1}(D_b^0)=\varnothing$，

$$N_x(P_b^{-1}(C_b^0))\geqslant(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)(P_b^{-1}(C_b^0))\geqslant\mathscr{T}_b(C_b^0)>t$$

同样，$N_y(P_b^{-1}(D_b^0))>t$. 所以

$$\sup_{A,B\subseteq\otimes_{a\in A}X_a,A\cap B=\varnothing}\min(N_x(A),N_y(B))\geqslant\min(N_x(P_b^{-1}(C_b^0)),N_y(P_b^{-1}(D_b^0)))>t.$$

因为t是任意的，结论得证。 □

1.10 **定理** 设X是不分明化拓扑空间，R是X上的等价关系，则

(1)$\vDash T_2(X/R)\to(R\in\mathscr{F}_{X\times X})$,

(2)$\vDash O(P)\to((R\in\mathscr{F}_{X\times X})\to T_2(X/R))$，其中$\mathscr{F}_{X\times X}$是积不分明化拓扑空间$X\times X$中的不分明闭集簇，$P$是从$X$到$X/R$上的投射.

证明 (1)若

$[T_2(X/R)] = \inf_{x \cdot y \in X, P(x) \neq P(y)} \sup_{A, B \subseteq X/R, A \cap B = \emptyset} \min(N_{p(x)}(A),$ $N_{p(y)}(B)) > t$，则对任意 $x \cdot y \in X$，存在 $A, B \subseteq X/R$，使得 $A \cap B = \emptyset$，且只要 $P(x) \neq P(y)$ 就有 $N_{p(x)}(A) > t, N_{p(y)}(B) > t$. 因为 $N_{p(x)}(A) = \sup_{p(x) \in C \subseteq A} \mathscr{U}(c)$，则存在 c 使得 $p(x) \in c \subseteq A$ 且 $\mathscr{U}(c) > t$. 同样，存在 D 使得 $p(y) \in D \subseteq B$ 且 $\mathscr{U}(D) > t$. 从 $A \cap B = \emptyset$，有 $C \cap D = \emptyset$ 且进而 $P^{-1}(c) \times P^{-1}(D) \subseteq X \times X \sim R$. 对任意 $(x, y) \in X \times X \sim R$，我们有 $P_{(x)} \neq P_{(y)}$，且进而有 C, D 使得 $P(x) \in C, P(y) \in D, P^{-1}(c) \times P^{-1}(D) \subseteq X \times X \sim R$ 且 $\mathscr{U}(c) > t, \mathscr{U}(D) > t$,

$$\sup_{M \subseteq X \times X \sim R} N_{(x,y)}(M) \geqslant N_{(x,y)}(P^{-1}(c) \times P^{-1}(D)) \geqslant (\mathscr{T} \times \mathscr{T})(P^{-1}(c) \times P^{-1}(D)) \geqslant \min(\mathscr{T}(P^{-1}(c)), \mathscr{T}(P^{-1}(D))) = \min(\mathscr{U}(c), \mathscr{U}(D)) > t.$$

因而，$[R \in \mathscr{F}_{X \times X}] = (\mathscr{T} \times \mathscr{T})(X \times X \sim R) = \inf_{(x,y) \in X \times X \sim R,} \sup_{M \subset X \times X \sim R} N_{(x,y)}(M) > t$.

由 t 的任意性，立得 $[T_2(X/R)] \leqslant [R \in \mathscr{F}_{X \times X}]$.

(2) 若 $[O(P)] = \inf_{\mathscr{U} \in \mathscr{T}(X)} \min(1.1 - \mathscr{T}(u) + \mathscr{U}(p(u))) > s$

且 $[R \in \mathscr{F}_{X \times X}] = \inf_{(x,y) \in X \times X \sim R}, \sup_{M \subseteq X \times X \sim R} N_{(x,y)}(M) > t$,

则对任意 $u \in \mathscr{P}(X)$，$1 - \mathscr{T}(u) + \mathscr{U}(p(u)) > s$，即 $\mathscr{U}(p(u)) > s + \mathscr{T}(u) - 1$，且地任意 $x, y \in X$，存在 $M \subseteq X \times X \sim R$，使得 $(x, y) \notin R$ 时 $N_{(x,y)}(M) > t$. 令

$$\mathscr{B} = \int_{A, B \in \mathscr{T}(X)} \min(\mathscr{T}(A), \mathscr{T}(B)) / A \times B \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X \times X)).$$

则不难验证 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ 的一个基．现对任意 $x \cdot y \in X$，若 $p(x) \neq p(y)$，则 $(x, y) \notin R$，且进而存在 $M \subseteq X \times X \sim R$ 使得

$$\sup_{L \in \mathscr{P}(X \times X), (x \cdot y) \in L \subseteq M} \mathscr{B}(L) \geqslant N_{(x \cdot y)}(M) > t.$$

即，存在 $A, B \in \mathscr{P}(X)$ 使得 $x \in A, y \in B, A \times B \subseteq M, \mathscr{T}(A) > t, \mathscr{T}(B) > t$. 因为 $A \times B \subseteq X \times X \sim R$，$p(A) \cap p(B) = \emptyset$. 另外，

$N_{p(x)}(p(A))=\sup_{p(x)\in c\subseteq p(A)}\mathscr{U}(c)\geqslant\mathscr{U}(p(A))>s+\mathscr{T}(A)-1>$
$s+t-1$.

同样 $N_{p(y)}(p(B))>s+t-1$.

因此，$\sup_{E,F\subseteq X/R,E\cap F=\emptyset}\min(N_{p(x)}(E),N_{p(y)}(F))\geqslant\min(N_{p(x)}(P(A)),N_{p(y)}(P(B)))>s+t-1$.

所以，$[T_2(X/R)]=\inf_{x,y\in X,p(x)\neq p(y)}\sup_{E,F\subseteq X/R,E\cap F=\emptyset}\min(N_{p(x)}(E),N_{p(y)}(F))\geqslant\max(0,s+t-1)$.

因为 s、t 都是任意的，故而得到

$$[T_2(X/R)]\geqslant[O(p)\wedge(R\in\mathscr{F}_{X\times X})].\quad\square$$

1.11 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是一不分明化拓扑空间，φ 是 $\mathscr{T}$ 的一个子基，且令

$$T_3^{(1)}(X,\mathscr{T}):=\forall x\forall D((x\in X)\wedge(D\in\mathscr{F})\wedge(x\notin D)\to\exists A((A\in N_x)\wedge(\overline{A}\cap D\equiv\emptyset))).$$

$$T_3^{(3)}(X,\mathscr{T}):=\forall x\forall A((x\in A)\wedge(A\in\mathscr{T})\to\exists B((B\in N_x)\wedge(\overline{B}\subseteq A))).$$

$$T_3^{(3)}(X,\mathscr{T}):=\forall x\forall D((x\in D)\wedge(D\in\varphi)\to\exists B((B\in N_x)\wedge(\overline{B}\subseteq D))).$$

则 $\vDash T_3(X,\mathscr{T})\leftrightarrow T_3^{(i)}(X,\mathscr{T}),i=1,2,3.$

证明 (1)我们首先证明

$$\sup_{A\in\mathscr{T}(X)}\min(N_x(A),\inf_{y\in D}N_y(A^c))=\sup_{A\cap B=\emptyset,D\subseteq B}\min(N_x(A),\mathscr{T}(B)).$$

当 $A\cap D\neq\emptyset$ 时，我们有 $y\in D$ 和$y\in A$，也就是 $y\in D$ 和$y\notin A^c$，于是$\inf_{y\in D}N_y(A^c)=0$. 从而公式的左端等于 0，而右端也显然为 0，现对 $A\cap D=\emptyset$ 时加以证明．因为

$$\sup_{A\cap D=\emptyset,A\in\mathscr{T}(X)}\min(N_x(A),\inf_{y\in D}N_y(A^c))=\sup_{A\cap D=\emptyset,A\in\mathscr{T}(X)}\min(N_x(A),\inf_{y\in D}\sup_{y\in B\subseteq A^c}\mathscr{T}(B)),$$

所以我们只需证明$\inf_{y\in D}\sup_{y\in B\subseteq A^c}=\sup_{A\cap B=\emptyset, D\subseteq B}\mathscr{T}(B)$即可。

对任意满足$A\cap B=\emptyset$的B和$y\in D\subseteq B$，有$y\in B\subseteq A^c$，于是

$$\inf_{y\in D}\sup_{y\in B\subseteq A^c}\mathscr{T}(B)\geqslant\sup_{A\cap B=\emptyset, D\subseteq B}\mathscr{T}(B)$$

另一方面，假设$\mathscr{D}_y=\{B\mid y\in B\subseteq A^c\}$，则

$$\inf_{y\in D}\sup_{y\in B\subseteq A^c}\mathscr{T}(B)=\sup_{f\in\Pi\{\mathscr{D}_y\mid y\in A^c\}}\inf_{y\in D}\mathscr{T}(f(y))\leqslant\sup_{f\in\Pi\{\mathscr{D}_y\mid y\in A^c\}}\mathscr{T}(\bigcup_{y\in D}f(y)).$$

显然有$\bigcup_{y\in D}f(y)\subseteq D$. 记$\bigcup_{y\in D}f(y)=B$，则$B\supseteq D$且$B\subseteq A^c$，也就是$A\cap B=\emptyset$. 于是我们得到

$$\inf_{y\in D}\sup_{y\in B\subseteq A^c}\mathscr{T}(B)\leqslant\sup_{A\cap B=\emptyset, D\subseteq B}\mathscr{T}(B)$$

和$\sup_{A\cap D=\emptyset A\in\mathscr{P}(X)}\min(N_x(A)), \sup_{A\cap B=\emptyset, D\subseteq B}\mathscr{T}(B))$

$$=\sup_{A\cap D=\emptyset, A\in\mathscr{P}(X)}\sup_{A\cap B=\emptyset, D\subseteq B}\min(N_x(A).\mathscr{T}(B))$$

$$=\sup_{A\cap B=\emptyset, D\subseteq B}\min(N_x(A),\mathscr{T}(B)).$$

因此$[T_3^{(1)}(X,\mathscr{T})]=\inf_{x\notin D}\min(1,1-\mathscr{T}(D^c)+\sup_{A\in\mathscr{P}(X)}\min(N_x(A).\inf_{y\in D}(1-\overline{A}(y))))$

$$=\inf_{x\notin D}\min(1,1-\mathscr{T}(D^c)+\sup_{A\in\mathscr{P}(X)}\min(N_x(A),\inf_{y\in D}N_y(A^c)))$$

$$=\inf_{x\notin D}\min(1,1-\mathscr{T}(D^c)+\sup_{A\cap B=\emptyset, D\subseteq B}\min(N_x(A),\mathscr{T}(B)))$$

$$=[T_3(X,\mathscr{T})]$$

也就是$\vDash T_3(X,\mathscr{T})\leftrightarrow T_3^{(1)}(X,\mathscr{T})$.

(2) $[T_3^{(2)}(X,\mathscr{T})]=\inf_{x\in A}\min(1,1-\mathscr{T}(A)+\sup_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(N_x(B),\inf_{y\in A}N_y(B^c)))$

$$=\inf_{x\in A^c}\min(1,1-\mathscr{T}(A^c)+\sup_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(N_x(B),\inf_{y\in A}N_y(B^c)))$$

$$=\inf_{x\notin A}\min(1,1-\mathscr{T}(A^c)+\sup_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(N_x(B),$$

$$\inf_{y\in A}(1-\overline{B}(y))))$$

$$=[T_3^{(1)}(X,\mathscr{T})].$$

(3) $[T_3^{(3)}(X,\mathscr{T})]=\inf_{x\in A}\min(1,1-\varphi(A)+\sup_{B\in\mathscr{R}(X)}\min(N_x(B)$ $\inf_{y\in A^c}N_y(B^c)))$.

因为 $\varphi\subseteq\mathscr{T}$，所以

$[T_3^{(3)}(X,\mathscr{T})]\geqslant[T_3^{(2)}(X,\mathscr{T})]=[T_3(X,\mathscr{T})]$

我们现在往证 $[T_3^{(3)}(X,\mathscr{T})]\leqslant[T_3^{(2)}(X,\mathscr{T})]$. 即要证明对任意 $x\in A$，

$$\min(1,1-\mathscr{T}(A)+\sup_{B\in\mathscr{R}(X)}\min(N_x(B),\inf_{y\in A^c}N_y(B^c)))\geqslant[T_3^{(3)}(X,\mathscr{T})].$$

令 $[T_3^{(3)}(X,\mathscr{T})]=\delta$，则对任意 $x\in X$ 和任意 $D_{\lambda_i}\in\mathscr{R}(X)$，$x\in D_{\lambda_i}$，$\lambda_i\in I_\lambda$（$I_\lambda$ 表示一个有限指标集），$\lambda\in\Lambda$，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\lambda_i\in I_i}D_{\lambda_i}=A$. 我们有：

$$1-\varphi(D_{\lambda_i})+\sup_{B\in\mathscr{T}(X)}\min(N_x(B),\inf_{y\in D^c_{\lambda_i}}N_y(B^c))>\delta-\varepsilon,$$

其中 ε 是任意正数. 因此

$$\sup_{B\in\mathscr{R}(X)}\min(N_x(B),\inf_{y\in D^c_{\lambda_i}}N_y(B^c))>\varphi(D_{\lambda_i})-1+\delta-\varepsilon.$$

置 $\mathscr{B}_{\lambda_i}=\{B\mid B\subseteq D_{\lambda_i}\}$. 则

$$\inf_{\lambda_i\in I_\lambda}\sup_{B\in\mathscr{R}(X)}\min(N_x(B),\inf_{y\in D^c_{\lambda_i}}N_y(B^c))$$

$$=\sup_{f\in\Pi\{\mathscr{B}_{\lambda_i}\mid\lambda_i\in I_\lambda\}}\inf_{\lambda_i\in I_\lambda}\min(N_x(f(\lambda_i)),\inf_{y\in D^c_{\lambda_i}}N_y(f(\lambda_i)^c)$$

$$=\sup_{f\in\Pi\{\mathscr{B}_{\lambda_i}\mid\lambda_i\in I_\lambda\}}\min(N_x(f(\lambda_i)),\inf_{\lambda_i\in I_\lambda}\inf_{y\in D^c_{\lambda_i}}N_y(f(\lambda_i)^c)$$

$$=\sup_{f\in\Pi\{\mathscr{B}_{\lambda_i}\mid\lambda_i\in I_\lambda\}}\min(N_x(f(\lambda_i)),\inf\nolimits_{y\in\bigcup_{\lambda_i\in I_\lambda}D^c_{\lambda_i}}N_y(f(\lambda_i)^c))$$

$$= \sup_{B\in\mathscr{N}(X)} \min(N_x(B), \inf_{y\in\bigcup_{\lambda_i\in I_\lambda} D^c_{\lambda_i}} N_y(B^c)).$$

其中 $B=f(\lambda_i)$.

我们同样可以证明

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}\sup_{B\in\mathscr{N}(X)} \min(N_x(B), \inf_{y\in\bigcup_{\lambda_i\in I_\lambda} D^c_{\lambda_i}} N_y(B^c))$$

$$= \sup_{B\in\mathscr{N}(X)} \min(N_x(B), \inf_{y\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{\lambda_i\in I_\lambda} D^c_{\lambda_i}} N_y(B^c))$$

$$= \sup_{B\in\mathscr{N}(X)} \min(N_x(B), \inf_{y\in A^c} N_y(B^c)).$$

于是我们有

$$\sup_{B\in\mathscr{N}(X)} \min(N_x(B), \inf_{y\in A^c} N_y(B^c)) \geqslant \inf_{\lambda\in\Lambda}\inf_{\lambda_i\in I_\lambda}\sup_{B\in\mathscr{N}(X)} \min(N_x(B),$$

$$\inf_{y\in D_{\lambda_i}} N_y(B^c)) \geqslant \inf_{\lambda\in\Lambda}\inf_{\lambda_i\in I_N}\varphi(D_{\lambda_i}) - 1 + \delta - \varepsilon.$$

对任意满足 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\lambda_i\in I_\lambda} D_{\lambda_i} = A$ 的 I_λ 和 Λ，上述不等式是成立的。于是

$$\sup_{B\in\mathscr{N}(X)} \min(N_x(B), \inf_{y\in A^c} N_y(B^c)) \geqslant \sup_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda = A}\inf_{\lambda\in\Lambda}\sup_{\bigcap_{\lambda_i\in I_\lambda} D_{\lambda_i} = D_\lambda}$$

$$\inf_{\lambda_i\in I_\lambda}\varphi(D_{\lambda_i}) - 1 + \delta - \varepsilon = \mathscr{T}(A) - 1 + \delta - \varepsilon,$$

即，$\min(1, 1-\mathscr{T}(A) + \sup_{B\in\mathscr{N}(X)} \min(N_x(B), \inf_{y\in A^c} N_y(B^c))) \geqslant \delta - \varepsilon$.

因为 ε 是任意正数，当 $\varepsilon\to 0$ 时，我们有

$$[T_3^{(2)}(X,\mathscr{T})] \geqslant \delta = [T_3^{(3)}(X,\mathscr{T})].$$

于是 $\vdash T_3(X,\mathscr{T}) \leftrightarrow T_3^{(3)}(X,\mathscr{T})$. □

1.12 **定理** 设 $(X,\mathscr{T})$ 是不分明化拓扑空间，

$$T_4^{(1)}(X,\mathscr{T}) := \forall A\,\forall B((A\in\mathscr{T})\wedge(B\in\mathscr{T})\wedge(A\cap B=\varnothing)$$
$$\to \exists G((G\in\mathscr{T})\wedge(A\subseteq G)\wedge(\overline{G}\cap B\equiv\varnothing))).$$

$$T_4^{(2)}(X,\mathscr{T}) := \forall A\,\forall B((A\in\mathscr{T})\wedge(B\in\mathscr{T})\wedge(A\cap B)$$
$$\to \exists G((G\in\mathscr{T})\wedge(A\subseteq G)\wedge(\overline{G}\subseteq B))).$$

则$\vdash T_4(X,\mathscr{T})\leftrightarrow T_4^{(i)}(X,\mathscr{T}),\ i=1,2.$

证明 类似于1.11定理的证明，略去. □

注，同于一般拓扑学，这里的 T_2－分离性也称 Hansdorff 分离性，T_3－分离性也称为正则分离性，T_4－分离性也称为正规分离性。

§2 分离性公量之间的关系

2.1 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，则 $\vdash T_3(X,\mathscr{T})\wedge T_1(X,\mathscr{T})\rightarrow T_2(X,\mathscr{T})$.

证明 我们要证明

$$[T_2(X,\mathscr{T})]\geqslant 1-\min(1,1-[T_3(X,\mathscr{T})]+1-[T_1(X,\mathscr{T})])$$
$$=\max(0,[T_3(X,\mathscr{T})]+[T_1(X,\mathscr{T})]-1).$$

首先，$[T_2(X,\mathscr{T})]\geqslant 0.$

其次，由1.3定理$[T_1(X,\mathscr{T})]=\inf\limits_{z\in X}\mathscr{T}(\{z\}^c).$

于是 $[T_3(X,\mathscr{T})]+[T_1(X,\mathscr{T})]$

$$=\inf_{x\in D}\min(1,1-\mathscr{T}(D^c)+\sup_{A\cap B=\varnothing,D\subseteq B}\min(N_x(A),\mathscr{T}(B)))+\inf_{z\in X}\mathscr{T}(\{z\}^c).$$

$$\leqslant\inf_{x\in X,x\neq y}\inf_{y\in X}\min(1,1-\mathscr{T}(\{y\}^c)+\sup_{A\cap B=\varnothing}\min(N_x(A),N_y(B)))+\inf_{z\in X}\mathscr{T}(\{z\}^c)$$

$$=\inf_{x\in D}(\inf_{y\in X}\min(1,1-\mathscr{T}(\{y\}^c)+\sup_{A\cap B=\varnothing}\min(N_x(A),N_y(B)))+\inf_{z\in X}\mathscr{T}(\{z\}^c)).$$

$$\leqslant\inf_{x\in X,x\neq y}\inf_{y\in X}(\min(1,1-\mathscr{T}(\{x\}^c)+\sup_{A\cap B=\varnothing}\min(N_x(A),N_y(B)))+\mathscr{T}(\{y\}^c))$$

$$\leqslant\inf_{x\neq y}(1+\sup_{A\wedge B=\varnothing}\min(N_x(A),N_y(B)))$$

$= 1 + \inf_{x \neq y} \sup_{A \cap B = \emptyset} \min(N_x(A). N_y(B)) = 1 + [T_2(X, \mathscr{T})]$.

也就是$[T_2(X,\mathscr{T})] \geqslant [T_3(X,\mathscr{T})] + [T_1(X,\mathscr{T})] - 1$.

因此,$[T_2(X,\mathscr{T})] \geqslant \max(0, [T_3(X,\mathscr{T})] + [T_1,(X,\mathscr{T})] - 1)$. □

2.2 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是不分明化拓扑空间,则 $\models T_4(X,\mathscr{T}) \wedge T_1(X,\mathscr{T}) \to T_3(X,\mathscr{T})$.

证明 显然需要证明$[T_3(X,\mathscr{T})] \geqslant [T_4(X,\mathscr{T})] + [T_1(X,\mathscr{T})] - 1$.

事实上,

$$[T_4(X,\mathscr{T})] + [T_1(X,\mathscr{T})]$$

$$= \inf_{E \cap D = \emptyset} \min(1, 1 - \min(\mathscr{T}(E^c), \mathscr{T}(D^c)) + \sup_{A \cap B = \emptyset, E \subseteq A, D \subseteq B} \min(\mathscr{T}(A), \mathscr{T}(B))) + \inf_{z \in X} \mathscr{T}(\{y\}^c)$$

$$\leqslant \inf_{x \notin D} \min(1, 1 - \min(\mathscr{T}(\{x\}^c, \mathscr{T}(D^c)) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))) + \inf_{z \in X} \mathscr{T}(\{z\}^c)$$

$$= \inf_{x \notin D} \min(1, \max((1 - \mathscr{T}(D^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))), (1 - \mathscr{T}(\{x\}^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))))) + \inf_{z \in X} \mathscr{T}(\{z\}^c)$$

$$= \inf_{x \notin D} \max(\min(1, 1 - \mathscr{T}(D^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))), \min(1, 1 - \mathscr{T}(\{x\}^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B)))) + \inf_{z \in X} \mathscr{T}(\{z\}^c)$$

$$\leqslant \inf_{x \notin D} \max(\min(1, 1 - \mathscr{T}(D^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))) + \mathscr{T}(\{x\}^c), \min(1, 1 - \mathscr{T}(\{x\}^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))) + \mathscr{T}(\{x\}^c))$$

$$\leqslant \inf_{x \notin D} \max(\min(1, 1 - \mathscr{T}(D^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))) + \mathscr{T}(\{x\}^c), 1)$$

$\leqslant \inf_{x \notin D} (\min(1, 1 - \mathscr{T}(D^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))) +$
1)

$= \inf_{x \notin D} \min(1, 1 - \mathscr{T}(D^c) + \sup_{A \cap B = \emptyset, D \subseteq B} \min(N_x(A), \mathscr{T}(B))) + 1$

$= [T_3(X, \mathscr{T})] + 1.$ □

2.3 **定理** 设$(X, \mathscr{T})$是不分明化拓扑空间，令 $T_4^{(3)}(X, \mathscr{T})$: $= \forall A \forall W((A \in \mathscr{F}) \wedge (W \in \mathscr{T}) \wedge (A \subseteq W)$

$\to \exists \mathscr{A}((K_0(\mathscr{A}, A) \wedge FC(\mathscr{A})) \wedge (\forall B)((B \in \mathscr{A}) \wedge (\overline{B} \subseteq W))))$.

则 $\models T_4(X, \mathscr{T}) \leftrightarrow T_4^{(3)}(X, \mathscr{T})$.

证明 对任意满足 $A \subseteq u \subseteq W$ 的 u，记 $\mathscr{A} = \{u\}$，则

$[K_0(\mathscr{A}, A)] = [K_0(\{u\}, A)] = [K(\{u\}, A)] + [\{u\} \subseteq \mathscr{T}] - 1$

$= 1 + \mathscr{T}(u) - 1 = \mathscr{T}(u).$

$[FC(\mathscr{A})] = [FC(\{u\})] = 1.$

$\inf_{B \in \mathscr{P}(X)} \min(\mathscr{A}(B), \inf_{y \in W^c} N_y(B^c)) = \inf_{B \in \mathscr{P}(X)} \min(\{u\}(B), \inf_{y \in W^c} N_y(B^c)) = \inf_{y \in W^c} N_y(u^c)$

于是$\sup_{\mathscr{A}} \min(K_0(\mathscr{A}, A) \wedge FC(\mathscr{A}), \inf_{B \in \mathscr{P}(X)} \min(\mathscr{A}(B), \inf_{y \in W^c} N_y(B^c)))$

$\geqslant \sup_{A \subseteq u} \min(\mathscr{T}(u), \inf_{y \in W^c} N_y(u^c))$

因此$[T_4^{(3)}(X, \mathscr{T})] \geqslant [T_4(X, \mathscr{T})]$.

现证明反向不等式$[T_4(X, \mathscr{T})] \geqslant [T_4^{(3)}(X, \mathscr{T})]$，若$[T_4^{(3)}(X, \mathscr{T})] = 0$，则不等式成立是显然的．假设$[T_4^{(3)}(X, \mathscr{T})] > \lambda > 0$，

即，$\inf_{A \subseteq W} \min(1, 1 - \min(\mathscr{T}(A^c), \mathscr{T}(W))$

$+ \sup_{\mathscr{A}} \min([K_0(\mathscr{A}, A) \wedge FC(\mathscr{A})], \inf_{B \in \mathscr{P}(X)} \min(\mathscr{A}(B), \inf_{y \in W^c} N_y(B^c))) > \lambda$，

因此对任意 $A \subseteq W$，也就是 $A \cap W^c = \emptyset$ 时，我们有

$$1-\min(\mathscr{T}(A^c),\mathscr{T}(W))+\sup_{\mathscr{A}}\min([K_0(\mathscr{A},A)\wedge FC(\mathscr{A})],$$

$$\inf_{B\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{A}(B),\inf_{y\in W^c}N_y(B^c))))>\lambda,(A)$$

其中 $\sup_{\mathscr{A}}\min([K_0(\mathscr{A},A)\wedge FC(\mathscr{A})],\inf_{B\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{A}(B),\inf_{y\in W^c}N_y(B^c)))>0$. 记 $\lambda'=\max(0,\lambda-1+\min(\mathscr{T}(A^c),\mathscr{T}(W)))$. 则

$$\sup_{\mathscr{A}}\min([K_0(\mathscr{A},A)\wedge FC(\mathscr{A})].\inf_{B\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{A}(B),\inf_{y\in W^c}N_y(B^c)))>\lambda'.$$

因此存在 $\mathscr{A}$ 使得

$$\min([K_0(\mathscr{A},A)\wedge FC(\mathscr{A})],\inf_{B\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{A}(B),\inf_{y\in W^c}N_y(B^c)))>\lambda'.(B)$$

(1)据公式 B,有

$$\inf_{B\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{A}(B),\inf_{y\in W^c}N_y(B^c))>\lambda'.$$

于是对任意 $B\subseteq X$ 有 $\mathscr{A}(B)>\lambda'$ 且 $\inf_{y\in W^c}N_y(B^c))>\lambda'$, 进而 $B\subseteq W$. 又从 $\inf_{y\in W^c}N_y(B^c)>\lambda'$ 中可知对任意 $y\in W^c$, 得到 $N_y(B^c)=\sup_{y\in B'\subseteq B^c}\mathscr{T}(B')>\lambda'$. 故而存在一个 B_y^* 使得 $y\in B_y^*\subseteq B^c$ 而且 $\mathscr{T}(B_y^*)>\lambda'$. 记 $B^*=U_{y\in W^c}B_y^*$. 则 $W^c\subseteq B^*\subseteq B^c$ 且 $\mathscr{T}(B^*)\geqslant\inf_{y\in W^c}\mathscr{T}(B_y^*)\geqslant\lambda'$. 于是对任意 $B\subseteq W$ 和 $\mathscr{A}(B)>\lambda'$, 存在一个 B^* 使得 $W^c\subseteq B^*\subseteq B^c$ 且 $\mathscr{T}(B^*)\geqslant\lambda'$.

(2)由公式(B)还可以得到

$$[K_0(\mathscr{A},A)\wedge FC(\mathscr{A})]\geqslant\lambda'.$$

即, $[K(\mathscr{A},A)]+[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}]+[FC(\mathscr{A})]-2$

$$=\inf_{x\in A}\sup_{x\in D\subseteq X}\mathscr{A}(D)+\inf_{u\in\mathscr{T}(X)}\min(1,1-\mathscr{A}(u)+\mathscr{T}(u)+1-\inf\{\alpha\mid c(\mathscr{A}_\lambda)\})-2>\lambda'.(c)$$

在公式(A)中, 若 $u=X$, 则 $\mathscr{T}(X)=1$, 于是得到

$$\inf_{u\in\mathscr{T}(X)}\min(1,1-\mathscr{A}(u)+\mathscr{T}(u))\leqslant\min(1,1-\mathscr{A}(X)+\mathscr{T}(X))=1.$$

因此公式(c)等价于

$$\inf_{x\in A}\sup_{x\in D\subseteq X}\mathscr{A}(D)>\lambda'+\inf\{\alpha\mid c(\mathscr{A}_\alpha)\}.$$

于是存在一个 β 使得 $c(\mathscr{A}_\beta)$ 且 $\inf_{x\in A}\sup_{x\in D\subseteq X}\mathscr{A}(D)>\lambda'+\beta$. 令 $\inf_{x\in A}\sup_{x\in D\subseteq X}\mathscr{A}(D)=\delta>\delta-\varepsilon$, 其中 ε 是任意一个正数, 则

$$\inf_{x\in A}\sup_{x\in D\subseteq X}\mathscr{A}(D)>\max(\lambda'+\beta,\delta-\varepsilon).$$

因而对任意 $x\in A$, 存在一个 D_x^ε 使得 $\mathscr{A}(D_x^\varepsilon)>\max(\lambda'+\beta,\delta-\varepsilon)$ 且 $U_{x\in A}D_x^\varepsilon\supseteq A$.

对任意 $x\in A$, $D_x^\varepsilon\in\mathscr{A}$, 有 $C(\mathscr{A}_\beta)$, 于是 D_x 的个数是可数的, 因此可以把它们记做 D_i^ε, $i=1,2,\cdots$, 且有 $\bigcup_{i=1}^\infty D_i^\varepsilon\supseteq A$.

根据(1)中的证明, 可以得到对任意 D_i^ε, 存在一个 $D_i^{\varepsilon^*}$ 使得 $W^c\subseteq D_i^{\varepsilon^*}\subseteq D_i^{\varepsilon^c}$ 且 $\mathscr{T}(D_i^{\varepsilon^*})\geqslant\lambda'>\lambda'-\varepsilon$.

(3)公式(c)可以写成如下形式:

$$\inf_{u\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-\mathscr{A}(u)+\mathscr{T}(u))>\lambda'+\beta+1-\delta.$$

因此对任意 u, 有

$$1-\mathscr{A}(u)+\mathscr{T}(u)>\lambda'+\beta+1-\delta,$$

于是 $\mathscr{T}(D_i^\varepsilon)>\lambda'+\beta-\delta+\mathscr{A}(D_i^\varepsilon)>\lambda'+\beta-\delta+\delta-\varepsilon=\lambda'+\beta-\varepsilon>\lambda'-\varepsilon$.

(4)注意到公式(A)中 A 和 W^c 的对称性, 我们改变 A 和 W^c 的位置, 则存在 E_i^ε, $i=1,2,\cdots$, 使得 $\bigcup_{i=1}^\infty E_i^\varepsilon\supseteq W^c$ 且 $\mathscr{T}(E_i^\varepsilon)>\lambda'-\varepsilon$, 且对注意 E_i^ε 存在 $E_i^{\varepsilon^*}$ 使得 $A\subseteq E_i^{\varepsilon^*}\subseteq E_i^{\varepsilon^c}$ 且 $\mathscr{T}(E_i^{\varepsilon^*})>\lambda'-\varepsilon$. 记

$$u_i^\varepsilon=D_i^\varepsilon\cap(\bigcap_{j\leqslant i}E_j^{\varepsilon^*}),\ v_i^\varepsilon=E_i^\varepsilon\cap(\bigcap_{j\leqslant i}D_j^{\varepsilon^*}),\ i=1,2,\cdots,$$

$$u^\varepsilon=\bigcup_{i=1}^\infty u_i^\varepsilon,\quad v^\varepsilon=\bigcup_{i=1}^\infty v_i^\varepsilon.$$

则明显 $u^\varepsilon\supseteq A$, $v^\varepsilon\supseteq W^c$ 且 $u_\varepsilon\cap v^\varepsilon=\varnothing$.

另一方面,

$$\mathcal{T}(u^\varepsilon)=\mathcal{T}(\bigcup_{i=1}^{\infty}u_i^\varepsilon)\geqslant\inf_{i\in N}\mathcal{T}(u_i^\varepsilon)\geqslant\inf_{i\in N}\min(\mathcal{T}(D_i^\varepsilon),\min_{1\leqslant j\leqslant i}\mathcal{T}(E_j^{\varepsilon^*}))\geqslant$$
$\lambda'-\varepsilon$,

且 $\mathcal{T}(v^\varepsilon)\geqslant\lambda'-\varepsilon$. 于是, $\min(\mathcal{T}(u^\varepsilon)、\mathcal{T}(v^\varepsilon))\geqslant\lambda'-\varepsilon$.

记 $\varepsilon=1/n$. 则

$$\sup_{u\cap v=\varnothing,A\subseteq u,u^c\subseteq v}\min(\mathcal{T}(u),\mathcal{T}(v))\geqslant\sup_{n\in N}\min(\mathcal{T}(u^{1/n}),\mathcal{T}(v^{1/n}))$$
$$\geqslant\sup_{n\in N}(\lambda'-1/n)=\lambda'$$

因此对任意 $A\cap W^c=\varnothing$, 得到

$$\min(1,1-\mathcal{T}(A^c)\wedge\mathcal{T}(W)+\sup_{u\cap v=\varnothing,A\subseteq u,W^c\subseteq v}\min(\mathcal{T}(u),\mathcal{T}(v)))$$
$\geqslant\lambda$.

于是 $[T_4(X,\mathcal{T})]\geqslant[T_4^{(3)}(X,\mathcal{T})]$. □

2.4 **定理** 设 $(X,\mathcal{T})$ 是不分明化拓扑空间, 则

$\vdash T_3(X,\mathcal{T})\wedge L(X,\mathcal{T})\rightarrow T_4(X,\mathcal{T})$

证明 设 $[T_3(X,\mathcal{T})\wedge L(X,\mathcal{T})]>\lambda>0$. 即,

$$\inf_{x\in W}\min(1,1-\mathcal{T}(W)+\sup_{u\in\mathcal{P}(X)}\min(N_x(u),\inf_{y\in W^c}N_y(u^c)))+$$
$$\inf_{\mathcal{A},A}\min(1,1-K_0(\mathcal{A},A)+\sup_{\mathcal{D}\subseteq\mathcal{A}}[K(\mathcal{D},A)\wedge FC(\mathcal{D})])-1>\lambda.$$
(D)

(1)在公式(D)中, 对任意 $x\in A\subseteq W$, 我们取 $\mathcal{A}\in\mathcal{T}(\mathcal{P}(X))$ 使得

$$\mathcal{A}(B)=\begin{cases}\mathcal{T}(W), & 若 B=W\\ 0, & 其它\end{cases}$$

则

$$1-\mathcal{T}(W)+\sup_{u\in\mathcal{P}(X)}\min(N_x(u),\inf_{y\in W^c}N_y(u^c))+1-[K_0(\{W\},$$
$$A)]+\sup_{\mathcal{D}\subseteq A}[K(\{W\},A)\wedge FC(\{W\})]-1>\lambda.$$

因此,

$$1-\mathcal{T}(W)+\sup_{u\in\mathcal{P}(X)}\min(N_x(u),\inf_{y\in W^c}N_y(u^c))+1-\mathcal{T}(W)+\mathcal{D}(W)$$
$-1>\lambda$,

且 $\sup_{u\in\mathscr{N}(X)}\min(N_x(u), \inf_{y\in W^c} N_y(u^c)) = \lambda - 1 + \mathscr{T}(W) + (\mathscr{T}(W) - \mathscr{D}(W)) \geqslant \lambda - 1 + \mathscr{T}(W) \wedge \mathscr{T}(A^c)$.

若 $\sup_{u\in\mathscr{N}(W)}\min(N_x(u), \inf_{y\in W^c} N_y(u^c)) = 0$,

则有$[T_4(X,\mathscr{T})] \geqslant \lambda$. 因此假设

$$\sup_{u\in\mathscr{T}(X)}\min(N_x(u), \inf_{y\in W^c} N_y(u^c)) > \max(0, \lambda - 1 + \mathscr{T}(W) \wedge \mathscr{T}(A^c)) = \lambda',$$

且对任意 $\varepsilon > 0$, 记

$$\sup_{u\in\mathscr{N}(X)}\min(N_x(u), \inf_{y\in W^c} N_y(u^c)) = \delta > \delta - \varepsilon.$$

因此,

$$\sup_{u\in\mathscr{N}(X)}\min(N_x(u), \inf_{y\in W^c} N_y(u^c)) > \max(\lambda', \delta - \varepsilon) = \lambda''.$$

故而存在一个 u_x^ε 使得

$$N_x(u_x^\varepsilon) > \lambda'' \text{及} \inf_{y\in W^c} N_y(u_x^{\varepsilon^c}) > \lambda''.$$

进而, $N_x(u_x^\varepsilon) = \sup_{x\in D\subseteq u_x^\varepsilon}\mathscr{T}(D) > \lambda''$. 故而存在一个 D_x^ε 使得 $x \in D_x^\varepsilon \subseteq u_\lambda^\varepsilon$ 且 $\mathscr{T}(D_\lambda^\varepsilon) > \lambda''$. 因此有

$$\inf_{y\in W^c} N_y(D_x^{\varepsilon^c}) \geqslant \inf_{y\in W^c} N_y(u_x^{\varepsilon^c}) > \lambda''.$$

(2)在公式(D)中, 我们取 $\mathscr{A}^\varepsilon$ 使得

$$\mathscr{A}^\varepsilon(B) = \begin{cases} \mathscr{T}(D_x), \text{若 } B = D \\ 0 \quad \text{其它} \end{cases}$$

则 $K_0(\mathscr{A}^\varepsilon, A) = \inf_{x\in A}\sup_{x\in D\subseteq X}\mathscr{A}^\varepsilon(D) + \inf_{u\in\mathscr{N}(X)}\min(1, 1 - \mathscr{A}^\varepsilon(u) + \mathscr{T}(u) - 1) = \inf_{x\in A}\mathscr{A}^\varepsilon(D_x^\varepsilon) = \inf_{x\in A}\mathscr{T}(D_x^\varepsilon) \geqslant \lambda''$.

对于 $\mathscr{A}^\varepsilon$, 存在一个 $\mathscr{D}^\varepsilon \subseteq \mathscr{A}^\varepsilon$ 使得$[K(\mathscr{D}^\varepsilon, A)] = \inf_{x\in A}\mathscr{D}^\varepsilon(D_x^\varepsilon)$

且公式(D)变为

$$1 - \mathscr{T}(W) + \delta + 1 - \inf_{x\in A}\mathscr{A}^\varepsilon(D_x) + \inf_{x\in A}\mathscr{D}^\varepsilon(D_x) + 1 - \inf\{\alpha\} C(\mathscr{D}_\alpha^\varepsilon)\} - 1 - 1 > \lambda,$$

即，$\inf_{x\in A}\mathscr{D}^\varepsilon(D_x^\varepsilon)>\lambda-1+\mathscr{T}(W)+\inf_{x\in A}\mathscr{A}^\varepsilon(D_x^\varepsilon)-\delta+\inf\{\alpha\mid C(\mathscr{D}_\alpha^\varepsilon)\}$

$\geqslant\lambda-1+\mathscr{T}(W)+\inf\{\alpha\mid C(\mathscr{D}_\alpha^\varepsilon)\}-\varepsilon$

$\geqslant\lambda-1+\mathscr{T}(W)\wedge\mathscr{T}(A^c)-\varepsilon$

于是$\inf_{x\in A}\mathscr{D}^\varepsilon(D_x^\varepsilon)\geqslant i-\varepsilon$　且 $D^\varepsilon(D_x^\varepsilon)\geqslant\lambda'-\varepsilon$.

因此，$\inf_{D\in\mathscr{D}(X)}\min(\mathscr{D}^\varepsilon(D),\ \inf_{y\in W^c}N_y(D^c))\geqslant\lambda'-\varepsilon$.

(3)在公式(D)中，我们用 $\mathscr{A}^\varepsilon$ 和 $\mathscr{D}^\varepsilon$ 来做替换，则

$1-\mathscr{T}(W)+\delta-1-[K_0(\mathscr{A}^\varepsilon,A)]+[K(\mathscr{D}^\varepsilon,A)\wedge(FC(\mathscr{D}^\varepsilon)]-1>\lambda$.

因为有$[\mathscr{D}\subseteq\mathscr{T}]=1,[K_0(\mathscr{D}^\varepsilon,A)]=[K(\mathscr{D}^\varepsilon,A)]$.

另一方面，$[K_0(\mathscr{A}^\varepsilon,A)]=\inf_{x\in A}\mathscr{A}^\varepsilon(D_x^\varepsilon)$,

于是$[K_0(\mathscr{D},A)\wedge FC(\mathscr{D}^\varepsilon)]=[K(\mathscr{D}^\varepsilon,A)\wedge FC(\mathscr{D}^\varepsilon)]>\lambda-1+\mathscr{T}(W)+\inf_{x\in A}\mathscr{A}^\varepsilon(D_x^\varepsilon)-\delta\geqslant\lambda'-\varepsilon$.

因此，

$\min([K_0(\mathscr{D}^\varepsilon,A)\wedge FC(\mathscr{D}^\varepsilon)],\ \inf_{D\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{D}^\varepsilon(D).\ \inf_{y\in W^c}N_y(D^c)))\geqslant\lambda'-\varepsilon$.

取 $\varepsilon=1/n$. 则

$\sup_{\mathscr{D}}\min([K_0(\mathscr{D},A)\wedge FC(\mathscr{D})],\ \inf_{D\in\mathscr{T}(X)}\min(\mathscr{D}(D),\ \inf_{y\in W^c}N_y(D^c)))\geqslant\sup_{n\in N}(\lambda'-1/n)=\lambda'$.

因此　$[T_4(X,\mathscr{T})]=[T_4^{(3)}(X,\mathscr{T})]\geqslant\lambda'$，即

$[T_4(X,\mathscr{T})]\geqslant[T_3(X,\mathscr{T})\wedge L(X,\mathscr{T})]$.　□

第六章　不分明化拓扑空间中的紧致性

§1　紧致性

1.1　**定义**　(1)设 Σ 是不分明化拓扑空间类．称一元不分明谓词 $\Gamma\in\mathscr{F}(\Sigma)$是不分明紧致性，定义为

$$\Gamma(X,\mathscr{T}):=(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},X)\wedge FF(\mathscr{D}))).$$

(2)设$(X,\mathscr{T})$是一不分明化拓扑空间，$A\subseteq X$．则

$$\Gamma(A):=\Gamma(A,\mathscr{T}|A).$$

1.2　**定理**　设$(X,\mathscr{T})$是一不分明化拓扑空间，$A\subseteq X$．则

$$\vDash\Gamma(A)\leftrightarrow(\forall\mathscr{A}(K_0(\mathscr{A},A)\rightarrow(\exists\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D}))).$$

其中 K_0 是关于 $\mathscr{T}$ 的不分明开复盖．

证明　对任意 $\tilde{\mathscr{A}}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，令

$$\tilde{\mathscr{A}}=\int_{B\subseteq X}\mathscr{A}(B)/A\cap B\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(A)).$$

则因任意 $x\in A$，$x\in B$ 当且仅当 $x\in A\cap B$，

$$K(\tilde{\mathscr{A}},A)=\inf_{x\in A}\sup_{x\in C}\tilde{\mathscr{A}}(C)=\inf_{x\in A}\sup\{\mathscr{A}(B)\mid x\in C=A\cap B,B\subseteq X\}$$

$$=\inf_{x\in A}\sup_{x\in B}\mathscr{A}(B)=[K(\mathscr{A},A)]$$

$$[\tilde{\mathscr{A}}\subseteq\mathscr{T}|_A]=\inf_{C\subseteq A}\min(1,1-\tilde{\mathscr{A}}(C)+\mathscr{T}|_A(C))$$

$$=\inf_{C\subseteq A}\min(1,1-\sup\{\mathscr{A}(B)\mid C=A\cap B,B\subseteq X\}+\sup\{\mathscr{T}(B)\mid$$

$C = A\cap B, B\subseteq X\})$

$\geqslant \inf\{\min(1, 1 - \mathscr{A}(B) + \mathscr{T}(B)) \mid C\subseteq A, C = A\cap B, B\subseteq X\}$

$= \inf_{B\subseteq X}\min(1, 1 - \mathscr{A}(B) + \mathscr{T}(B)) = [\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}].$

对任意 $\mathscr{D}\leqslant\tilde{\mathscr{A}}$, 我们定义 $\mathscr{D}'\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 如下:

$$\mathscr{D}'(B) = \begin{cases} \mathscr{D}(B) & \text{若 } B\subseteq A \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则 $\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{A}$. $[FF(\mathscr{D}')] = [FF(\mathscr{D})]$ 且 $[K(\mathscr{D}', A)] = [K(\mathscr{D}, A)]$. 因此, 有

$$[\Gamma(A)]\otimes[K_0(\mathscr{A}, A)]\leqslant[T(A)]\otimes[K'_0(\tilde{\mathscr{A}}, A)]$$

$$\leqslant[\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\tilde{\mathscr{A}})\wedge K(\mathscr{D}, A)\wedge FF(\mathscr{D}))]$$

$$\leqslant[\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D}',, A)\wedge FF(\mathscr{D}'))]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{B})(\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{B}, A)\wedge FF(\mathscr{B}))].$$

从而 $[\Gamma(A)]\leqslant[K_0(\mathscr{A}, A)]\propto[(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{B}, A)\wedge FF(\mathscr{B}))]$.

其中 K_0' 是关于 $\mathscr{T}|_A$ 的不分明开复盖。所以

$[\Gamma(A)]\leqslant\inf_{\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))}([K_0(\mathscr{A}, A)]\propto[(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge(K(\mathscr{B}, A)\wedge FF(\mathscr{B}))])$

$= [(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A}, A)\rightarrow(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{B}, A)\wedge FF(\mathscr{B})))]$.

相反地, 对任意 $\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(A))$, 若 $[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}|_A] = \inf_{B\subseteq A}\min(1, 1 - \mathscr{A}(B) + \mathscr{T}|_A(B)) = \lambda$, 则对任意 $n\in N$ 和 $B\subseteq A$.

$$\sup\{\mathscr{T}(C)\mid B = A\cap C, C\subseteq X\} = \mathscr{T}|_A(B) > \lambda + \mathscr{A}(B) - 1 - \frac{1}{n}$$

且存在 $C_B\subseteq X$ 使得 $B = A\cap C_B$ 且 $\mathscr{T}(C_B) > \lambda + \mathscr{A}(B) - 1 - 1/n$. 令

$$\tilde{\mathscr{A}} = \int_{B\subseteq A}\max(0, \lambda + \mathscr{A}(B) - 1 - \frac{1}{n})/C\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)).$$

则$[\tilde{\mathscr{A}}\subseteq\mathscr{T}]=1$ 且

$$[K(\tilde{\mathscr{A}},A)]=\inf_{x\in A}\sup\{\tilde{\mathscr{A}}(C)\mid x\in C\subseteq X\}=\inf_{x\in A}\sup_{x\in B}\tilde{\mathscr{A}}(C_B)$$

$$\geqslant\inf_{x\in A}\sup_{x\in B}(\lambda+\mathscr{A}(B)-1-\frac{1}{n})$$

$$=\inf_{x\in A}\sup_{x\in B}\mathscr{A}(B)+\lambda-1-\frac{1}{n}=[K(\mathscr{A},A)]+\lambda-1-\frac{1}{n},$$

$$[K_0(\tilde{\mathscr{A}},A)]=[K(\tilde{\mathscr{A}},A)]\geqslant\max(0,[K(\mathscr{A})]+\lambda-1-\frac{1}{n})$$

$$\geqslant\max(0,[K(\mathscr{A},A)]+\lambda-1)-\frac{1}{n}=[K'_0(\mathscr{A},A)]-\frac{1}{n}.$$

对任意 $\mathscr{D}\leqslant\tilde{\mathscr{A}}$, 置

$$\mathscr{D}'=\int_{B\subseteq A}\mathscr{D}(C_B)/B\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(A)).$$

则 $\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{A}$, $[FF(\mathscr{D}')]=[FF(\mathscr{D})]$且$[K(\mathscr{D}',A)]=[K(\mathscr{D},A)]$. 进而

$$[(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},A)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant A)\wedge K(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]\otimes$$
$$[K'_0(\mathscr{A},A)]-\frac{1}{n}$$

$$\leqslant[(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},A)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant A)\wedge K(\mathscr{D},A)\wedge FF$$
$$(\mathscr{D})))]\otimes([K'_0(\mathscr{A},A)]-\frac{1}{n})$$

$$\leqslant(K_0(\tilde{\mathscr{A}},A)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\tilde{A})\wedge K(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]\otimes$$
$$([K_0(\tilde{\mathscr{A}},A)]$$

$$\leqslant(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\tilde{\mathscr{A}})\wedge K(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]$$
$$\leqslant(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D}',A)\wedge FF(\mathscr{D}'))]$$
$$\leqslant(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{B},A)\wedge FF(\mathscr{B}))]$$

令 $n\to\infty$, 则得到

$$[(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},A)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]\otimes$$
$$[K'_0(\mathscr{A},A)]$$

$\leqslant(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{B},A)\wedge FF(\mathscr{B})))]$

$[(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},A)\rightarrow(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]$

$\leqslant[K_0'(\mathscr{A},A)]\propto[(\exists\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{B},A)\wedge FF(\mathscr{B})))]$.

因此,

$[(\forall\mathscr{A})(K_0(\mathscr{A},A)\rightarrow(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]$

$\leqslant\inf_{\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))}([K'_0(\mathscr{A},A)]\propto[(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{B},A)\wedge FF(\mathscr{B}))])$

$=[\Gamma(A)]$. □

1.3 **定义** 设 X 是一个集合,称一元不分明谓词 $fI\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$ 为不分明有限交的,定义为

$fI(\mathscr{A}):(\forall\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge FF(\mathscr{B})\rightarrow(\exists x)(\forall B)((B\in\mathscr{B})\rightarrow(x\in B)))$.

1.4 **定理** 设$(X,\mathscr{T}$ 是一个不分明化拓扑空间,$\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个子基,且令

$\beta_1:=(\forall\mathscr{A})(K_{\mathscr{S}}(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},X)\wedge FF(\mathscr{D})))$.

其中 $K_{\mathscr{S}}(\mathscr{A},X):=K(\mathscr{A},X)\wedge(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{S})$,

$\beta_2:=(\forall S)((S$ 是 X 中的万有网$)\rightarrow(\exists x)((x\in X)\wedge(S\triangleright x)))$.

$\beta_3:=(\forall S)((S\in N(X))\rightarrow(\exists x)((T<S)\wedge(x\in X)\wedge(T\triangleright x)))$.

$\beta_4:=(\forall S)((s\in N(X))\rightarrow(\neg(adhS\equiv\emptyset))$.

$\beta_5:=(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)))\wedge(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F})\wedge fI(\mathscr{A}))\rightarrow(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A})\rightarrow(x\in A)))$.

则 $\vDash\Gamma(X,\mathscr{T})\leftrightarrow\beta_i(i=1,2,3,4,5)$

证明 (a)因为 $\varphi\subseteq\mathscr{T}$,故而对任意 $\mathscr{A}$,$[\mathscr{A}\subseteq\varphi]\leqslant[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}]$,所以有$[K_\varphi(\mathscr{A},X)]\leqslant[K_0(\mathscr{A},X)]$,即有$[\Gamma(X,\mathscr{T})]\leqslant[\beta_1]$.

(b) $[\beta_2]=\inf\{\sup_{x\in X}[S\triangleright x]\mid S$ 是 X 中的万有网$\}$.

(i)若 X 是有限的，令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，注意到对 X 中的任意万有网 S，都存在 $i_0\in\{1,\cdots,m\}$ 使得 $S\subseteq\{x_{i_0}\}$，若不然，则对任意 $i\in\{1,\cdots,m\}$，$S\not\subseteq\{x_i\}$，$S\subseteq X-\{x_i\}$ 且 $S\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}(X-\{x_i\})=\varnothing$，显然是矛盾的，因此，只要 $S\not\subseteq A$，那么由于对任意 x 和 A，$\vDash A\in N_x\rightarrow x\in A$，因而 $x_{i0}\notin A$ 及 $N_{x_{i_0}}(A)=0$，所以，

$$[S\triangleright x_{i_0}]=\inf_{S\not\subseteq A}(1-N_{x_{i_0}}(A))=1.$$

即，得到 $[\beta_2]=1\geqslant[\beta_1]$.

(ii)在一般情况下，对任意 $\lambda\in[0,1]$，若 $[\beta_2]<\lambda$，则在 X 中存在一个万有网 S 使得 $\sup_{x\in X}[S\triangleright x]<\lambda$ 且对任意 $x\in X$.

$$[S\triangleright x]=\inf_{S\not\subseteq A}(1-N_x(A))<\lambda.$$

即，存在 $A\subseteq X$ 使得 $S\not\subseteq A$ 且 $N_x(A)>1-\lambda$. 因 φ 是 $\mathscr{T}$ 的一个子基，$\varphi^{(\cap)}$ 是 $\mathscr{T}$ 的基，故而由基的定义知

$$\sup_{x\in B\subseteq A}\varphi^{(\cap)}(B)>1-\lambda.$$

即，存在 $B\subseteq A$ 使得 $x\in B\subseteq A$ 且

$$\sup\{\min_{\lambda\in\Lambda}\varphi(B_\lambda)\mid\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=B,\ B_\lambda\subseteq X(\lambda\in\Lambda)\text{且}\Lambda\text{是有限的}\}=\varphi^{(\cap)}(B)>1-\lambda.$$

因此，存在一个有限集 Λ 和 $B_\lambda\subseteq X(\lambda\in\Lambda)$ 使得 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda=B$ 且对任意 $\lambda\in\Lambda$，$\varphi(B_\lambda)>1-\lambda$. 因为 $S\not\subseteq A$ 且 Λ 是有限的，则存在 $\lambda(x)\in\Lambda$，使得 $S\not\subseteq B_{\lambda(x)}$. 置

$$\mathscr{A}_0=\int_{\lambda\in\Lambda}\varphi(B_{\lambda(x)})/B_{\lambda(x)}\cdot.$$

若 $\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A}_0$，则对任意 $\alpha>0$，$\mathscr{D}_\alpha\subseteq\{B_{\lambda(x)}\mid x\in X\}$. 从而对任意 $B\in\mathscr{D}_\alpha$，因 S 是万有网，故 $S\not\subseteq B$ 及 $S\subseteq B^c$. 若

$$[FF(\mathscr{D})]=1-\inf\{\alpha\in[0,1]:F(\mathscr{D}_\alpha)\}=t.$$

则对任意 $n\in\omega$,

$$\inf\{\alpha\in[0,1]:F(\mathscr{D}_\alpha)\}<1-t+\frac{1}{n}.$$

且存在 $\alpha_0<1-t+1/n$ 使得$F(\mathscr{D}_{\alpha_0})$. 若 $\alpha_0=0$, 则 $\mathscr{P}(X)=\mathscr{D}_{\alpha_0}$, 是有限的, 由(i)得证。若 $\alpha_0>0$, 则对任意 $B\in\mathscr{D}_{\alpha_0}$, $S\subseteq B^c$, 因 $F(\mathscr{D}_{\alpha_0})$, 故有 $S\subseteq\bigcap\{B^c:B\in\mathscr{D}_{\alpha_0}\}\neq\emptyset$, 即有$\bigcup\mathscr{D}_{\alpha_0}\neq X$ 且存在$x_0\in X$ 使得任意$B\in\mathscr{D}_{\alpha_0}$, 有 $x\notin B$. 因此, 若 $x_0\in B$, 则 $B\notin\mathscr{D}_{\alpha_0}$, 即 $\mathscr{D}(B)<\alpha_0$,

$$[K(\mathscr{D},X)]=\inf_{x\in X}\sup_{x\in B}\mathscr{D}(B)\leqslant\sup_{x_0\in B}\mathscr{D}(B)\leqslant\alpha_0<1-t+\frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$, 得到$[K(\mathscr{D},X)]\leqslant1-t$ 且$[K(\mathscr{D},X)\,\mathrm{A}FF(\mathscr{D})]=0$. 此外, 我们有$[K_\varphi(\mathscr{A}_0,X)]\geqslant1-t$. 实际上, $[\mathscr{A}_0\subseteq\varphi]=1$ 且因 $x\in B_{\lambda(x)}$, $[K_\varphi(\mathscr{A}_0,X)]=\inf_{x\in X}\sup_{x\in B}\mathscr{A}_0(B)\geqslant\inf_{x\in X}\mathscr{A}_0(B_{\lambda(x)})\geqslant\inf_{x\in X}\varphi(B_{\lambda(x)})\geqslant1-\lambda$.

故而最终得到

$$\begin{aligned}[\beta_1]&=\inf_{\mathscr{A}}[K_\varphi(\mathscr{A},X)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},X)\,\mathrm{A}FF(\mathscr{D}))]\\&\leqslant[K_\varphi(\mathscr{A}_0,X)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A}_0)\wedge K(\mathscr{D},X)\,\mathrm{A}FF(\mathscr{D}))]\\&=\max(0,1-[K_\varphi(\mathscr{A}_0,S)]+\sup_{\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A}_0}[K(\mathscr{D},X)\,\mathrm{A}FF(\mathscr{D})])\leqslant\\&\lambda\end{aligned}$$

注意到 λ 的任意性, 得到$[\beta_1]\leqslant[\beta_2]$.

(c)由 *J. L. Kelley* 所者一般拓扑学(General Toplogy, Van Nostrand, New York, 1955)[3]中问题 2, $J(d)$的结论即可证得$[\beta_2]\leqslant[\beta_3]$.

(d)由第一章 5.2 定理(4)可证得$[\beta_3]=[\beta_4]$.

(e)征证$[\beta_4]\leqslant[\beta_5]$, 对任意 $\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$, 设$[fI(\mathscr{A})]=\lambda$. 则对任意 $\alpha>1-\lambda$, 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{A}_d$, 则 $A_1\cap\cdots\cap A_n\neq\emptyset$. 事实上, 令

$$\mathscr{B}=\sum_{i=1}^{n}\mathscr{A}(A_i)/A_i.$$

则 $\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}$ 且 $[FF(\mathscr{B})]=1$. 设 $\varepsilon=\lambda+\alpha-1$, 则有

$$\lambda-\varepsilon<\lambda\leqslant[FF(\mathscr{B})\rightarrow(\exists x)(\forall B)((B\in\mathscr{B})\rightarrow(x\in B))]=$$

$\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{x\notin B}(1-\mathscr{B}(B))$.

因此存在 $x_0\in X$ 使得 $\lambda-\varepsilon<\inf_{x_0\notin B}(1-\mathscr{B}(B))$. 由 $x_0\notin B$ 可推导出 $\mathscr{B}(B)<1-\lambda+\varepsilon=\alpha$ 及 $x_0\in\bigcap\mathscr{B}_\alpha=A_1\cap\cdots\cap A_n$.

现令 $\mathscr{U}_\alpha=\{A_1\cap\cdots\cap A_n\mid n\in N,A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{A}_\alpha\}$ 且 $S:\mathscr{U}_\alpha\rightarrow X,B\rightarrow x_B\in B,B\in\mathscr{U}_\alpha$, 则不难得知 $(\mathscr{U}_\alpha,\subseteq)$ 是一个定向集及 S 是 X 中的一个网．因此,

$$[\beta_4]\leqslant[\neg(adhs\equiv\varnothing]=\sup_{x\in X}\inf_{s\nsubseteq A}(1-N_x(A)).$$

假设 $[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F}]=\mu$, 则对任意 $B\in\mathscr{P}(X)$, $\mathscr{A}(B)\leqslant1+\mathscr{F}(B)-\mu$, 且

$$[(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F})\wedge fI(\mathscr{A})\rightarrow(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A})\rightarrow(x\in A))]$$

$$=\min(1,2-\mu-\lambda+\sup_{x\in X}\inf_{x\notin A}(1-\mathscr{A}(A))$$

因此, 我们只需证明对任意 $x\in X$,

$$\inf_{s\nsubseteq A}(1-N_x(A))\leqslant2-\mu-\lambda+\inf_{x\notin A}(1-\mathscr{A}(A))$$

即, $\sup\limits_{x\notin A}\mathscr{A}(A)\leqslant2-\mu-\lambda+\sup\limits_{s\nsubseteq A}N_x(A)$ 对某个 $\alpha>1-\lambda$ 成立．

现对 $\forall t\in[0,1]$, 若 $\sup_{x\notin A}\mathscr{A}(A)>t$, 则存在 A_0 使得 $x\notin A_0$ 且 $t<\mathscr{A}(A_0)$.

情形 1: $t\leqslant1-\lambda$. 则明显有 $t\leqslant2-\mu-\lambda+\sup\limits_{s\nsubseteq A}N_x(A)$.

情形 2: $t>1-\lambda$. 令 $\alpha=\frac{1}{2}(t+1-\lambda)$ 且有 $A_0\in\mathscr{A}_\alpha$, $A_0\in\mathscr{U}_\alpha$, 此外, $t<\mathscr{A}(A_0)\leqslant1+\mathscr{F}(A_0)-\mu$, $t+\mu-1\leqslant\mathscr{F}(A_0)=\mathscr{T}(A_0^c)$. 因为 $A_0\in\mathscr{U}_\alpha$, 可知 $S_B\in A_0$, 即 $B\subseteq A_0$, 且 $S\nsubseteq A_0^c$ 时 $S_B\notin A_0^c$. 因此,

$$2-\mu-\lambda+\sup_{s\nsubseteq A}N_x(A)\geqslant2-\mu-\lambda+N_x(A_0^c)$$

$$\geqslant 2-\mu-\lambda+\mathscr{T}(A_0^c)\geqslant t+(1-\lambda)\geqslant t.$$

注意到 t 是任意的,所欲得证.

(f)最后证明$[\beta_t]=[\Gamma(X,\mathscr{T})]$.

对任意 $\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$. 令

$$\mathscr{A}^c=\int_{A\in\mathscr{P}(X)}\mathscr{A}(A)/A^c.$$

则 $\models(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})\leftrightarrow(\mathscr{A}^c\subseteq\mathscr{F})$.

$\models FF(\mathscr{A})\leftrightarrow FF(\mathscr{A}^c)$.

$\models(\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}^c)\leftrightarrow(\mathscr{B}^c\leqslant\mathscr{A})$.

$\models K(\mathscr{A},X)\leftrightarrow\neg(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A}^c)\rightarrow(x\in A)$.

$$\begin{aligned}\models\neg fI(\mathscr{A}^c)&\leftrightarrow(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}^c)\wedge FF(\mathscr{B})\wedge\neg(\exists x)(\forall B)((B\\&\quad\in\mathscr{B})((B\in\mathscr{B})\rightarrow(x\in B))).\\&\leftrightarrow(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}^c\leqslant\mathscr{A})\wedge FF(\mathscr{B}^c)\wedge K(\mathscr{B}^c,X))\\&\leftrightarrow(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge FF(\mathscr{D})\wedge K(\mathscr{D},X))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\models\beta_5&\leftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}^c\subseteq\mathscr{F})\wedge fI(\mathscr{A}^c)\rightarrow(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A}^c)\\&\quad\rightarrow(x\in A)))\\&\leftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}^c\subseteq\mathscr{F})\rightarrow(fI(\mathscr{A}^c)\rightarrow(\exists x)(\forall A)((A\in\\&\quad\mathscr{A}^c)\rightarrow(x\in A)))).\\&\leftrightarrow(\forall A)((\mathscr{A}^c\subseteq\mathscr{F})\rightarrow(\neg(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A}^c)\rightarrow(x\\&\quad\in A))\rightarrow\neg fI(\mathscr{A}^c)))\\&\leftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})\rightarrow(K(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K\\&\quad(\mathscr{D},X)\wedge FF(\mathscr{D}))).\\&\leftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})\wedge K(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D})\leqslant\mathscr{A})\wedge K\\&\quad(\mathscr{D},X)\wedge FF(\mathscr{D}))).\\&\leftrightarrow[\Gamma(X,\mathscr{T})].\quad\square\end{aligned}$$

注:1.4 定理中$\models\Gamma(X,\mathscr{T})\leftrightarrow\beta_1$ 是一般拓扑学中 Alexander 子基定理的推广。

§2 某些紧致性质

2.1 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，$A\subseteq X$，则
$\vDash \Gamma(X,\mathscr{T})\wedge(A\in\mathscr{T})\rightarrow\Gamma(A)$

证明 设$A\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(A))$，定义$\widetilde{\mathscr{A}}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$如下：

$$\widetilde{\mathscr{A}}(B)=\begin{cases}\mathscr{A}(B) & 若 B\subseteq A\\ 0 & 其它\end{cases}$$

则$[FF(\widetilde{\mathscr{A}})]=[FF(\mathscr{A})]$，且

$$\sup_{x\in X}\inf_{x\notin B\subseteq X}(1-\widetilde{\mathscr{A}}(B))=\sup_{x\in X}(\inf_{x\notin B\subseteq A}(1-\widetilde{\mathscr{A}}(B))\wedge\inf_{x\notin B\nsubseteq A}(1-\widetilde{\mathscr{A}}(B)))$$

$$=\sup_{x\in X}\inf_{x\notin X}\inf_{x\notin B\subseteq A}(1-\mathscr{A}(B))$$

$$=\sup_{x\in A}\inf_{x\notin B\subseteq A}(1-\mathscr{A}(B))\vee\sup_{x\notin A}\inf_{x\notin B\subseteq A}(1-\mathscr{A}(B)).$$

若$x\notin A$，则对任意$x'\in A$，

$$\inf_{x'\notin B\subseteq A}(1-\mathscr{A}(B))=\inf_{B\subseteq A}(1-\mathscr{A}(B))\leqslant\inf_{x'\notin B\subseteq A}(1-\mathscr{A}(B)).$$

因此

$$\sup_{x\notin X}\inf_{x\notin B\subseteq X}(1-\widetilde{\mathscr{A}}(B))=\sup_{x\in A}\inf_{x\notin B\subseteq A}(1-\mathscr{A}(B)).$$

$$[fI(\widetilde{\mathscr{A}})]=\inf_{\widetilde{\mathscr{B}}\leqslant\widetilde{\mathscr{A}}}\min(1,1-[FF(\widetilde{\mathscr{B}})]+\sup_{x\in X}\inf_{x\notin B\subseteq X}(1-\widetilde{\mathscr{B}}(B))).$$

$$=\inf_{\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}}\min(1,1-[FF(\mathscr{B})]+\sup_{x\in A}\inf_{x\notin B\subseteq A}(1-\mathscr{B}(B)))$$

$$=[fI(\mathscr{A})].$$

$$\mathscr{T}(A)\otimes[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}|A]=\mathscr{T}(A)\otimes\inf_{B\subseteq A}\min(1,1-\mathscr{A}(B)+\mathscr{T}|A(B))$$

$$=\inf_{B\subseteq A}\min(\mathscr{T}(A),\max(0,\mathscr{T}(A)+\mathscr{T}|A(B)-\mathscr{A}(B))).$$

$$\mathscr{T}(A)+\mathscr{T}|A(B)-1\leqslant\mathscr{T}(A)\wedge\mathscr{T}|A(B)$$

$$=\mathscr{T}(A)\wedge\sup\{\mathscr{T}(B')\mid B'\cap A=B,B'\subseteq X\}$$

$$= \sup\{\mathscr{F}(A) \wedge \mathscr{F}(B') \mid B' \cap A = B, B' \subseteq X\}$$

$$\leqslant \sup\{\mathscr{F}(A \cap B') \mid B' \cap A = B. B' \subseteq X\} \leqslant \mathscr{F}(B)$$

$$\mathscr{F}(A) \otimes [\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F} | A] \leqslant \inf_{B \subseteq A} \min(1, 1 - \mathscr{A}(B) + \mathscr{F}(B))$$

$$= \inf_{B \subseteq X} \min(1, 1 - \tilde{\mathscr{A}}(B) + \mathscr{F}(B))$$

$$= [\tilde{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{F}]$$

进而，由 1.2 定理得到

$$[\Gamma(X, \mathscr{T})] \otimes [A \in \mathscr{F}] \otimes [\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F} | A] \otimes [fI(\mathscr{A})]$$

$$\leqslant [\Gamma(X, \mathscr{T})] \otimes [\tilde{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{F}] \otimes [fI(\tilde{\mathscr{A}})]$$

$$\leqslant \sup_{x \in X} \inf_{x \notin B \subseteq X} (1 - \tilde{\mathscr{A}}(B))$$

$$\leqslant \sup_{x \in A} \inf_{x \notin B \subseteq A} (1 - \mathscr{A}(B)).$$

即，$[\Gamma(X, \mathscr{T})] \otimes [A \in \mathscr{F}] \leqslant ([\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F} | A] \otimes [fI(\mathscr{A})] \propto \sup_{x \in A} \inf_{x \notin B \subseteq A} (1 - \mathscr{A}(B)).$

因此，

$$[\Gamma(X, \mathscr{T})] \otimes [A \in \mathscr{F}]$$

$$\leqslant \inf_{\mathscr{A} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))} (([\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F} | A] \otimes [fI(\mathscr{A})]) \propto \sup_{x \in A} \inf_{x \notin B \subseteq A} (1 - \mathscr{A}(B)))$$

$$= [\Gamma(A)]. \quad \square$$

2.2 定理 设$(X, \mathscr{T})$与$(Y, \mathscr{U})$是二个不分明化拓扑空间，$f \in Y^X$，则

$$\vDash \Gamma(X, \mathscr{T}) \wedge C(f) \to \Gamma(f(X)).$$

证明 设$\mathscr{B} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(Y))$.

$$\mathscr{A} = f^{-1}(\mathscr{B}) = \int_{A \subseteq X} \mathscr{B}(f((A)) / A \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$$

则

$$[K(\mathscr{A}, X)] = \inf_{x \in X} \sup_{x \in A} \mathscr{A}(A) = \inf_{x \in X} \sup_{x \in A} \mathscr{B}(f(A))$$

$$= \inf_{x \in X} \sup_{f(x) \in B} \mathscr{B}(B) = \inf_{y \in f(X)} \sup_{y \in B} \mathscr{B}(B)$$

$$= [k(\mathscr{B}, f(X))].$$

$$[\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}]\otimes[C(f)]=\inf_{B\subseteq Y}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{U}(B))\otimes\inf_{B\subseteq Y}\min$$

$$(1,1-\mathscr{U}(B)+\mathscr{T}(f^{-1}(B)))$$

$$=\inf_{B\subseteq Y}\max(\min(1,1-\mathscr{U}(B)+\mathscr{F}(f^{-1}(B)),1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{U}$$

$$(B),1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}(f^{-1}(B))),0)$$

$$\leqslant\inf_{B\subseteq Y}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}(f^{-1}(B)))$$

$$=\inf_{A\subseteq X}\inf_{f^{-1}(B)=A}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}(f^{-1}(B)))$$

$$=\inf_{A\subseteq X}\inf_{f^{-1}(B)=A}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}(A))$$

$$=\inf_{A\subseteq X}\min(1,1-\sup_{f^{-1}(B)=A}\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}(A))$$

$$=\inf_{A\subseteq X}\min(1,1-\mathscr{A}(A)+\mathscr{T}(A))=[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}].$$

对任意 $\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A}$, 令

$$\tilde{\mathscr{D}}=f(\mathscr{D})=\int_{A\subseteq X}\mathscr{D}(A)/f(A)\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(Y)).$$

则有 $[FF(\mathscr{D})]\leqslant[FF(\tilde{\mathscr{D}})]$, $\tilde{\mathscr{D}}=f(\mathscr{D})\leqslant f(\mathscr{A})=ff^{-1}(\mathscr{B})\leqslant\mathscr{B}$, 且

$$[K(\tilde{\mathscr{D}},f(X))]=\inf_{y\in f(X)}\sup_{y\in B}\tilde{\mathscr{D}}(B)=\inf_{y\in f(X)}\sup\{\mathscr{D}(A)\mid y\in B=f(A)\}$$

$$\geqslant\inf_{y\in f(X)}\sup_{f^{-1}(y)\in A}\mathscr{D}(A)=\inf_{x\in X}\sup_{x\in A}\mathscr{D}(A)=[K(\mathscr{D},X)]$$

进而有

$$[\Gamma(X,\mathscr{T})]\otimes[C(f)]\otimes[K'_0(\mathscr{B},f(X)]$$

$$=[\Gamma(X,\mathscr{T})]\otimes[C(f)]\otimes[K(\mathscr{B},f(X))]\otimes[\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}]$$

$$\leqslant[\Gamma(X,\mathscr{T})]\otimes[K_0(\mathscr{A},X)]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\mathscr{D},X)\wedge FF(\mathscr{D}))]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge K(\tilde{\mathscr{D}},f(X))\wedge FF(\tilde{\mathscr{D}})))]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{D}')((\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{B})\wedge K(\mathscr{D}',f(X))\wedge FF(\mathscr{D}'))].$$

即 $[\Gamma(X,\mathscr{T})]\otimes[C(f)]\leqslant[K'_0(\mathscr{B},f(X))]\propto[(\exists\mathscr{D}')((\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{B})$

$\wedge K(\mathscr{D}', f(X)) \wedge FF(\mathscr{D}'))]$.

其中 k'_0 是关于 $\mathscr{U}$ 的不分明开复盖，因此得到

$$[\Gamma(X,\mathscr{T})]\otimes[C(f)]$$

$$\leqslant \inf_{\mathscr{B}\in\mathscr{F}(\mathscr{T}(Y))}([K'_0(\mathscr{B}, f(X))]\propto[(\exists\mathscr{D}')((\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{B})\wedge K(\mathscr{D}', f$$

$$(X))\wedge FF(\mathscr{D}'))]=[\Gamma(f(X))]. \quad \square$$

2.3 **定理** 设 $(X,\mathscr{T})$ 是不分明化拓扑空间，$A, B\subseteq X$，则

(1) $T_2(X,\mathscr{T})\wedge(\Gamma(A)\wedge\Gamma(B))\wedge(A\cap B=\varnothing)$

$$\overset{ws}{\models} T_2(X,\mathscr{T})\to(\exists u)(\exists v)((u\in\mathscr{T})\wedge(V\in\mathscr{T})\wedge(A\subseteq u)$$

$$\wedge(B\subseteq v)\wedge(u\cap v=\varnothing))$$

(2) $T_2(X,\mathscr{T})\wedge\Gamma(A)\overset{ws}{\models}T_2(X,\mathscr{T})\to A\in\mathscr{F}$.

证明 (1)假设 $A\cap B=\varnothing$ 且 $[T_2(X,\mathscr{T})]=1$. 令 $x\in A$. 则对任意 $y\in B$ 和 $\lambda<t$，有

$$\sup\{\mathscr{T}(P)\wedge\mathscr{T}(Q)\mid x\in P, y\in Q, P\cap Q=\varnothing\}$$

$$=\sup\{\mathscr{T}(P)\wedge\mathscr{T}(Q)\mid x\in P\subseteq u, y\in Q\subseteq v, u\cap v=\varnothing\}$$

$$=\sup_{u\cap v=\varnothing}(N_x(u)\wedge N_y(v))>\lambda.$$

即，存在 P_y、Q_y 使得 $x\in P_y$, $y\in Q_y$, $P_y\cap Q_y=\varnothing$ 且 $\mathscr{T}(P_y)>\lambda$, $\mathscr{T}(Q_y)>\lambda$. 令

$$\mathscr{B}=\int_{y\in B}\mathscr{T}(Q_y)/Q_y.$$

因为 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}$，故而

$$[K_0(\mathscr{B}, B)]=[K(\mathscr{B}, B)]=\inf_{y\in B}\sup_{y\in c}\mathscr{B}(c)\geqslant\inf_{y\in B}\mathscr{B}(Q_y)$$

$$=\inf_{y\in B}\mathscr{T}(Q_y)\geqslant\lambda.$$

另一方面，从 $\overset{w}{\models}T_2(X,\mathscr{T})\wedge(\Gamma(A)\wedge\Gamma(B))$ 推出 $1-t<[\Gamma(A)\wedge\Gamma(B)]\leqslant[\Gamma(A)]$.

因此，对任意 $\lambda\in(1-[\Gamma(A)], t)$，有

$$1-\lambda\leqslant[\Gamma(A)]\leqslant 1-[K_0(\mathscr{B}, B)]+\sup_{\mathscr{D}\leqslant\mathscr{B}}[K(\mathscr{D}, B)\wedge FF(\mathscr{D})]$$

$$\leqslant 1-\lambda+\sup_{\mathscr{D}\leqslant\mathscr{B}}[K(\mathscr{D},B)\wedge FF(\mathscr{D})]$$

且存在 $\mathscr{D}\leqslant\mathscr{B}$ 使得$[K(\mathscr{D},B)]+FF(\mathscr{D})]-1>0$, 即 $\inf\{\theta: F(\mathscr{D}_\theta)\}<[K(\mathscr{D},B)]$, 因此存在 $\theta_1<[K(\mathscr{D},B)]$并有 $F(\mathscr{D}_{\theta 1})$, 因为 $\mathscr{D}\leqslant\mathscr{B}$, 从而可以记 $\mathscr{D}_{\theta_1}=\{Q_{y_1},\cdots,Q_{y_n}\}$. 令 $u_x=P_{y_1}\cap\cdots\cap P_{y_n}$, $v_x=Q_{y_1}\cup\cdots\cup Q_{y_n}$, 则 $v_x\supseteq B$, $u_x\cap v_x=\varnothing$, $\mathscr{T}(u_x)\geqslant\min_{j=1,\cdots,n}\mathscr{T}(P_{y_j})>\lambda$ 且 $\mathscr{T}(v_x)=\min_{j=1,\cdots,n}\mathscr{T}(Q_{y_j})>\lambda$. 实际上

$$\inf_{y\in B}\sup_{y\in D}\mathscr{D}(D)=[K(\mathscr{D},B)]>\theta_1$$

且对任意 $y\in B$, 存在 D 使得$y\in D$ 且 $\mathscr{D}(D)>\theta_1$, $D\in\mathscr{D}_{\theta_1}$. 同样地, 若 $\lambda\in(1-[\Gamma(A)\wedge\Gamma(B)],t)$, 我们可以得到 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in A$ 满足$u_0=u_{x_1}\cup u_{x_2}\cup\cdots\cup u_{x_m}\supseteq A$. 令 $v_0=v_{x_1}\cap v_{x_2}\cdots\cap v_{x_m}$, 则有 $v_0\subseteq B$, $u_0\cap v_0=\varnothing$ 而且

$$\begin{aligned}&[(\exists u)(\exists v)(u\in\mathscr{T}\wedge v\in\mathscr{T}\wedge A\subseteq u\wedge B\subseteq v\wedge u\cap v=\varnothing)]\\&\geqslant\mathscr{T}(u_0)\wedge\mathscr{T}(v_0)\\&\geqslant\min_{i=1,\cdots,m}\mathscr{T}(u_{x_i})\wedge\min_{i=1,\cdots,m}\mathscr{T}(v_{x_i})>\lambda.\end{aligned}$$

最后, 我们令 $\lambda\to t$, 证明结束.

(2)假设$\overset{w}{\models}T_2(X,\mathscr{T})\wedge\Gamma(A)$, 对$\forall x\in A^c$, 则由(1)得

$$\begin{aligned}\sup_{x\in u\subseteq A^c}\mathscr{T}(u)&\geqslant\sup\{\mathscr{T}(u)\wedge\mathscr{T}(v)\mid x\in u, A\subseteq v, u\cap v=\varnothing\}\\&\geqslant(T_2(X,\mathscr{T})].\end{aligned}$$

再由第一章 1.5 引理, 得到

$$\mathscr{F}(A)=\inf_{x\in A^c}\sup_{x\in u\subseteq A^c}\mathscr{T}(u)\geqslant[T_2(X,\mathscr{T})].\quad\Box$$

2.4 定理 设$(X,\mathscr{T})$与$(Y,\mathscr{U})$是二个不分明化拓扑空间, $f\in X^Y$, 则

$$\models\Gamma(X,\mathscr{T})\wedge T_2(Y,\mathscr{U})\wedge C(f)\to Q(f).$$

证明 对任意 $A\subseteq X$, 由第一章 7.3 引理和本节 2.1 定理, 2.2 定理可以得到

(i) $[\Gamma(X,\mathscr{T})]\otimes\mathscr{F}_X(A)\leqslant[\Gamma(A)]$.

(ii) $[C(f)]\leqslant[C(f|A)]$, 且

(iii) $[\Gamma(A)]\otimes[C(f|A)]\leqslant[\Gamma(f|A))]=[\Gamma(f(A))]$.

再由 2.3 定理(2)得到 $T_2(Y,\mathscr{U})\wedge\Gamma(f(A))\models^{ws} T_2(Y,\mathscr{U})\to f(A)\in\mathscr{F}_Y$, 从而可推出

(iv) $\models T_2(Y,\mathscr{U})\wedge\Gamma(f(A))\to f(A)\in\mathscr{F}_Y$.

结合(i)~(iv), 我们可得到

$$
\begin{aligned}
&[\Gamma(X,\mathscr{T})]\otimes[C(f)]\otimes[T_2(Y,\mathscr{U})]\\
&\quad\leqslant(\mathscr{F}_X(A)\propto[\Gamma(A)])\otimes[C(f|A)]\otimes[T_2(Y,\mathscr{U})]\\
&\quad\leqslant(\mathscr{F}_X(A)\propto([\Gamma(A)]\otimes[C(f|A)]))\otimes[T_2(Y,\mathscr{U})]\\
&\quad\leqslant(\mathscr{F}_X(A)\propto[\Gamma(f(A))])\otimes[T_2(Y,\mathscr{U})]\\
&\quad\leqslant\mathscr{F}_X(A)\propto([\Gamma(f(A))]\otimes[T_2(Y,\mathscr{U})])\\
&\quad\leqslant\mathscr{F}_X(A)\propto\mathscr{F}_Y(f(A)).
\end{aligned}
$$

因此,

$$
[\Gamma(X,\mathscr{T})]\otimes[C(f)]\otimes[T_2(Y,\mathscr{U})]\leqslant\inf_{A\subseteq X}(\mathscr{F}_X(A)\propto\mathscr{F}_y(f(A)))=[Q(f)]. \quad\square
$$

§3 Tychonoff 定理的推广和应用

3.1 **定理**(Tychonoff) 设$\{(X_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$是一簇不分明化拓扑空间, 则

$$\models(\forall a)((a\in A)\to\Gamma(X_a,\mathscr{T}_a))\leftrightarrow\Gamma(\bigtimes_{a\in A}X_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a).$$

证明 对任意 $a_0\in A$, 由第二章 1.2 引理和本章 2.2 定理得到

$$[\Gamma(\bigtimes_{a\in A}X_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)]=[\Gamma(\bigtimes_{a\in A}X_a,\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)]\otimes[C(p_{a_0})]\leqslant[\Gamma(\times_{a_0},\mathscr{T}_{a_0})].$$

反之, 由第二章 1.7 定理和本章 1.4 定理得到

$[\Gamma(\bigtimes_{a\in A}X_a, \bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)] = \inf\{\sup_{x\in\bigtimes_{a\in A}X_a}[S\triangleright x] \mid S$ 是 $\bigtimes_{a\in A}X_a$ 中的万有网$\}$

$$= \inf\{\sup_{x\in\bigtimes_{a\in A}X_a}\inf_{a\in A}[P_a\circ s\triangleright p_a(x)] \mid s \text{ 是 } \bigtimes_{a\in A}X_a \text{ 中的万有网}\}$$

$$= \inf\{\inf_{a\in A}\sup_{x_a\in X_a}[P_a\circ s\triangleright x_a] \mid s \text{ 是 } \bigtimes_{a\in A}X_a \text{ 中的万有网}\}$$

$$= \inf_{a\in A}\inf\{\sup_{x_a\in X_a}[P_a\circ s\triangleright x_a] \mid s \text{ 是 } \bigtimes_{a\in A}X_a \text{ 中的万有网}\}$$

$$\geqslant \inf_{a\in A}\inf\{\sup_{x_a\in X_a}[s\triangleright x_a] \mid s \text{ 是 } \bigtimes_{a\in A}X_a \text{ 中的万有网}\}$$

$$= \inf_{a\in A}[\Gamma(X_a, \mathscr{T}_a)].$$

上面证明过程中用到了 J. L. Kelley 所着一般拓扑学(Geperal Topology, Van Nostrand, New York, 1955)[13]中问题 2, $J(b)$的结论,故而当 s 是$\bigtimes_{a\in A}X_a$ 中的万有网时,$p_a\circ s$ 是 X_a 中的万有网. □

3.2 **定义** 设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间,$A\subseteq X$,则 A 的邻域系记作$N_A\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$并定义如下:

$$u\in N_A := A\subseteq u^0.$$

3.3 **定理**(*Wallace*). 对每个 $i\leqslant k$,$(X_i,\mathscr{T}_i)$是不分明化拓扑空间,且对任意 i,$A_i\subseteq X_i$. 令 $A = \bigtimes_{i=1}^{k}A_i$ 及 $W\subseteq\bigtimes_{i=1}^{k}X_i$. 则

$$w\in N_A \wedge (\forall_i\leqslant k)\Gamma(A_i) \overset{us}{\vDash} W\in N_A \to (\exists u_1)\cdots(\exists u_k)$$
$$((\forall i\leqslant k)(u_i\in N_{A_i})\wedge\bigtimes_{i=1}^{k}u_i\subseteq w).$$

证明 我们对 k 进行归纳 .

(1)$k=2$,假设 $t=[w\in N_{A_1\times A_2}]$且令

$$\mathscr{B} = \int_{u\subseteq X,\, v\subseteq Y}\mathscr{T}(u)\wedge\mathscr{U}(v)/u\times v.$$

由第一章 2.1 定义,4.1 定义,第二章 1·8 定理及本节 3.2 定义,对任意 $\lambda<t$ 可得到

$$\lambda < [A_1\times A_2\subseteq W^\circ] = \inf_{x_1\in A_1 x_2\in A_2}N_{(x_1,x_2)}(W)$$

$$\leqslant \inf_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2} \sup_{(x_1, x_2) \in c \subseteq w} \mathscr{B}(c)$$

$$= \inf_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2} \sup\{\mathscr{T}_1(u_1) \wedge \mathscr{T}_2(u_2) \mid x_1 \in u_1, x_2 \in u_2, u_1 \times u_2 \subseteq W\}.$$

因此,对任意 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$,存在 $u_1(x_1, x_2) \subseteq X_1$ 和 $u_2(x_1, x_2) \subseteq X_2$ 使得 $x_1 \in u_1(x, x_2), x_2 \in u_2(x_1, x_2), u_1(x_1, x_2) \times u_2(x_1, x_2) \subseteq W$ 且 $\mathscr{T}_1(u_1(x_1, x_2)) > \lambda, \mathscr{T}_2(u_2(x_1, x_2)) > \lambda$.

令 $\mathscr{A}_{x_2} = \int_{x_1 \in A_1} \mathscr{T}(u_1(x_1, x_2)) / u_1(x_1, x_2)$.

则 $k_0(\mathscr{A}_{x_2}, A_1) \geqslant \lambda$. 由 $\overset{w}{\models} W \in N_{A_1 \times A_2} \mathrm{A}(\Gamma(A_1) \wedge \Gamma(A_2))$ 我们可以推出 $1 - [\Gamma(A_1)] < t$. 对任意 $\lambda \in (1 - [\Gamma(A_1)], t)$,相似于 2.3 定理证明方法 . 可以找到 $x_{11}, \cdots, x_{1m} \in A$,使得 $u_1(x_2) = \bigcup_{i=1}^{m} u_1(x_{1i}, x_2) \supseteq A_1$,令 $u_2(x_2) = \bigcap_{i=1}^{m} u_2(x_{1i}, x_2)$,则 $x_2 \in u_2(x_2), \mathscr{T}_1(u_1(x_2)) > \lambda, \mathscr{T}_2(u_2(x_2)) > \lambda$ 且 $u_1(x_2) \times u_2(x_2) \subseteq W$. 若 $\lambda \in (1 - [\Gamma(A_1) \wedge \Gamma(A_2)], t]$,我们也可找到 $x_{21}, \cdots x_{2n} \in A_2$ 使得 $u_{20} = \bigcup_{j=1}^{n} u_2(x_{2j}) \subseteq A_2$. 令 $u_{10} = \bigcap_{j=1}^{n} u_1(x_{2j})$,则 $A_1 \subseteq u_{10}, A_2 \subseteq u_{20}, u_{10} \times u_{20} \subseteq W, \mathscr{T}_1(u_{10}) > \lambda, \mathscr{T}_2(u_{20}) > \lambda$ 且

$$\begin{aligned}
[(\exists u_1)(\exists u_2)(u_1 \in N_{A_1} \wedge u_2 \in N_{A_2} \wedge u_1 \times u_2 \subseteq W)] &\geqslant N_{A_1}(u_{10}) \wedge N_{A_2}(u_{20}) \\
&\geqslant \mathscr{T}_1(u_{10}) \wedge \mathscr{T}_2(u_{20}) \\
&> \lambda
\end{aligned}$$

令 $\lambda \to t$,则当 $k = 2$ 时结论成立 .

(2)现假设对于 k 结论成立,证明对于 $k+1$ 结论也是成立的.

令 $t = [W \in N_{\times_{i=1}^{k+1} A_i}]$,则 $\overset{w}{\models} W \in N_{\times_{i=1}^{k+1} A_i} \mathrm{A}(\forall i \leqslant k+1) \Gamma(A_i)$ 可推出

$$1 - [(\forall i \leqslant k) \Gamma(A_i)] \leqslant 1 - [(\forall i \leqslant k+1) \Gamma(A_i)] < t$$

且由(1)和3.1定理,

$\overset{w}{\models} W\in N_{\times_{i=1}^{k+1}A_i}\to(\exists u)(\exists u_{k+1})(u\in N_{\times_{i=1}^{k+1}A_i}\wedge u_{k+1}\in N_{A_{k+1}}\wedge u\times u_{k+1}\subseteq W)$

对任意 $\lambda\in(1-[(\forall i\leqslant k)\Gamma(A_i)],t)$,存在 $u\subseteq\times_{i=1}^{k}X_i$ 和 $u_{k+1}\subseteq X_{k+1}$ 使得 $u\times u_{k+1}\subseteq W$, $N_{\times_{i=1}^{k}A_i}(u)>\lambda$ 和 $N_{A_{k+1}}(u_{k+1})>\lambda$.

因而 $\overset{w}{\models} u\in N_{\times_{i=1}^{k}A_i}\ \mathrm{A}(\forall i\leqslant k)\Gamma(A_i)$. 由归纳假设,得到

$\models u\in N_{\times_{i=1}^{k}A_i}\to(\exists u_1)\cdots(\exists u_k)((\forall i\leqslant k)(u_i\in N_{A_i})\wedge\times_{i=1}^{k}u_i\subseteq u$ 且

$[(\exists u_1)\cdots(\exists u_k)(\exists u_{k+1})((\forall i\leqslant k+1)(u_i\in N_{A_i})\wedge\times_{i=1}^{k+1}u_i\subseteq u)]>\lambda$

最后令 $\lambda\to t$,完成全部证明. □

3.4 **定理**(Forlik-lin) 对任意 $s\in S$, $(X_s,\mathscr{T}_s)$ 是不分明化拓扑空间,且 $A_s\subseteq X_s$. 令 $A=\times_{s\in S}A_s$ 及 $W\subseteq\times_{s\in S}X_s$. 则

$$W\in N_A\ \mathrm{A}(\forall s\in S)\Gamma(A_s)\overset{us}{\models}W\in N_A\to(\exists g)(Cf(g)\wedge\times_{s\in S}g(s)\subseteq W\wedge(\forall s\in S)(g(s)\in N_{A_s})\wedge\times_{s\in S}g(s)\in N_A).$$

其中 $Cf(g)$ 表示 g 是 $\{\mathscr{P}(X_s)\mid s\in S\}$ 的一个选择函数.

证明 设 $t=[W\in N_A]$, φ 是积不分明化拓扑 $\times_{s\in S}\mathscr{T}_s$ 的子基, $\mathscr{B}=\varphi^{(\cap)}$.

对任意 $\lambda<t$,由第一章2.1定义,4.1定义和本节3.2定义,则得到 $\lambda<\inf_{x\in A}\sup_{x\in C\subseteq W}\mathscr{B}(C)$ 且对任意 $x\in A$,存在 C_x 使得 $x\in C_x\subseteq W$ 和 $\mathscr{B}(C_x)>\lambda$. 令

$$\mathscr{A}=\int_{x\in A}\mathscr{B}(C_x)/C_x$$

则由 $\overset{w}{\models} W\in N_A\ \mathrm{A}(\forall s\in S)\Gamma(A)$ 和3.1定理推出 $1-[\Gamma(A)]=1-\inf_{s\in S}[\Gamma(A_s)]<t$. 对于 $\lambda\in(1-[\Gamma(A)],t)$,依据2.3定理

证明方法，可以找到 $x_1,\cdots,x_n$ 满足 $\bigcup_{i=1}^{n}C_{x_i}\supseteq A$. 对于每个 i，因为 $\mathscr{B}(C_{x_i})>\lambda\geqslant 0$，我们可以假设 $C_{x_i}=\times_{s\in S_i}G_s^i\times\times_{s\in S-S_i}X_i$，其中 S_i 是 S 的一个有限子集且 $G_s^i\subseteq X_s$. 因而，令 $S_0=\bigcup_{i=1}^{n}S_i$ 和

$$G=\bigcup_{i=1}^{n}(\times_{s\in S_i}G_s^i\times\times_{x\in S_0-S_i}X_s)$$

则有 $\bigcup_{i=1}^{n}C_{x1}=G\times\underset{s\in S-S_0}{\times}X_s$. 故而

$$\min_{s\in S_i}\mathscr{T}_s(G_s^i)=\min_{s\in S_i}\varphi(P_s^{-1}(G_s^i))=\mathscr{B}(C_{x_i})>\lambda.$$

注意到 $\times_{s\in S_0}A_s(G)=[\times_{s\in S_0}A_s\subseteq G^\circ]\geqslant[\times_{s\in S_0}A_s\subseteq G]\otimes$

$$[G\subseteq G^\circ]=[G\subseteq G^\circ]=(\underset{s\in S_0}{\times}\mathscr{T}_s(G)\geqslant\min_{i=1,\cdots,n}\min_{s\in S_i}\mathscr{T}_s(G_s^i)>\lambda.$$

此外 $1-\min_{s\in S_0}[\Gamma(A_s)]\leqslant 1-\inf_{s\in S}[\Gamma(A_s)]<t$.

对任意 $\lambda\in(1-\min_{s\in S_0}[\Gamma(A_s)],t)$，有 $\overset{w}{\models}N_{\times_{s\in S_0}A_s}(G)\wedge(\forall s\in S_0)\Gamma(A_s)$ 由 3.3. 定理，存在 $u_s(s\in S_0)$ 使得 $N_{A_s}(u_s)>\lambda(s\in S_0)$ 和 $\times_{s\in S_0}u_s\subseteq G$. 最后令

$$g_0(s)=\begin{cases}u_s, & s\in S_0\\ X_s, & s\in S-s_0\end{cases}$$

则因 $A\subseteq\times_{s\in S}g_0(s)$，有

$$\begin{aligned}N_A(\times_{s\in S}g_0(s))&\geqslant(\times_{s\in S}\mathscr{T}_s)(\times_{s\in S}g_0(s))\\&\geqslant\mathscr{B}(\times_{s\in S}g_0(s))\\&=\min_{s\in S_0}\mathscr{F}_s(u_s)>\lambda\end{aligned}$$

反之，

$$[(\exists g)(cf(g)\wedge\times_{s\in S}g(s)\subseteq W\wedge(\forall s\in S)(g(s)\in N_{A_s})$$
$$\wedge\times_{s\in S}g(s)\in N_s)]$$
$$\geqslant\inf_{s\in S}N_{A_s}(g_0(s))\wedge N_A(\underset{s\in S}{\times}g_0(s))$$
$$=\min_{s\in S_0}N_{A_s}(u_s)\wedge N_A(\underset{s\in S}{\times}g_0(s))>\lambda.$$

令 $\lambda\to t$，证明结束． □

第七章　不分明化拓扑中的仿紧性 S－紧性和 θ－紧性

§1　不分明化拓扑中的局部有限性

本章将讨论不分明化拓扑中的仿紧性，为此，首先把刻画仿紧性的局部有限性、σ 局部有限性以及加细等概念进行深入讨论。

1.1　**定义**　设$(X,\mathscr{T})$为不分明化拓扑空间，称一元不分明谓词 $LF\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)))$为不分明局部有限的，定义为

$LF(\mathscr{A}):=(\forall x)(\exists B)((B\in N_x)\wedge F(\mathscr{A}\cap B))$，其中

$(\mathscr{A}\cap B)(C)=\begin{cases}\mathscr{A}(c),B\cap C\neq\varnothing\\ 0,B\cap C=\varnothing\end{cases}$　$F(\mathscr{A})$表示 $supp\mathscr{A}$ 有限．

1.2　**定理**　$\models\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}\rightarrow(LF(\mathscr{A})\rightarrow LF(\mathscr{B}))$

证明　若 $\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}$，则 $supp\mathscr{B}\subseteq supp\mathscr{A}$，所以 $supp(\mathscr{B}\cap B)\subseteq supp(\mathscr{A}\cap B)$．从而$\{B\mid F(\mathscr{A}\cap B)\}\subseteq\{B\mid F(\mathscr{B}\cap B)\}$，即 $\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{F(\mathscr{A}\cap B),x\in B}N_x(B)\leqslant\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{F(\mathscr{B}\cap B),x\in B}N_x(B)$，所以得到$[LF(\mathscr{A})]\leqslant[LF(\mathscr{B})]$．　□

1.3　**定理**　对任意 $\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，有

$\models LF(\mathscr{A})\rightarrow(\forall\mathscr{B}((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\rightarrow(\bigcup supp\mathscr{B})'\equiv\bigcup\{A'\mid A\in supp\mathscr{B}\})$

证明　由 $A\subseteq B$ 可得$A'\subseteq B'$，所以由$\bigcup supp\mathscr{B}\supseteq A$，对任何 $A\in supp\mathscr{B}$，可得$(\bigcup supp\mathscr{B})'\supseteq\bigcup\{A'\mid A\in supp\mathscr{B}\}$．因此

$[(\forall\mathscr{B}((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\rightarrow(\bigcup supp\mathscr{B})'\equiv\bigcup\{A'\mid A\in supp\mathscr{B}\})]$

$=\inf\limits_{\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}}[(\bigcup supp\mathscr{B})'\subseteq\bigcup\{A'\in supp\mathscr{B}\}]$

$$= \inf_{\mathscr{B} \leqslant \mathscr{A}} \inf_{x \in X} \min(1, 1 - (\bigcup supp\mathscr{B})'(x) + \sup_{A \in supp\mathscr{B}} A'(x))$$

$$= \inf_{\mathscr{B} \leqslant \mathscr{A}} \inf_{x \in X} \min(1, 1 - (1 - N_x((\bigcup supp\mathscr{B})^c \cup \{x\})) + \sup_{A \in supp\mathscr{B}} (1 - N_x(A^c \cup \{x\})))$$

$$= \inf_{\mathscr{B} \leqslant \mathscr{A}} \inf_{x \in X} \min(1, 1 + N_x(\bigcap_{A \in supp\mathscr{B}} (A^c \cup \{x\})) - \inf_{A \in supp\mathscr{B}} N_x(A^c \cup \{x\}))$$

因为 $\mathscr{B} \leqslant \mathscr{A}$, 由 1.2 定理得 $[LF(\mathscr{B})] \geqslant [LF(\mathscr{A})]$. 若设 $[LF(\mathscr{A})] > \lambda > 0$, 则 $[LF(\mathscr{B})] > \lambda$. 所以 $\inf_x \sup_{F(\mathscr{B} \cap B). x \in B} N_x(B) > \lambda$. 即对任何 $x \in X$, 存在 B_x, 使 $F(\mathscr{B} \cap B_x)$ 且 $N_x(B_x) > \lambda$. 因此存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in supp\mathscr{B}$, 使 $c_i \cap B_x \neq \emptyset$, $i = 1, \cdots, n$. 令 $\mathscr{B}_0 = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$. 则对任何 $A \in supp\mathscr{B} - \mathscr{B}_0$, 有 $A \cap B_x = \emptyset$, 即 $B_x \subseteq A^c$. 所以 $N_x(\bigcap_{A \in supp\mathscr{B}} (A^c \cup \{x\})) = N_x((\bigcap_{A \in \mathscr{B}_0} (A^c \cup \{x\})) \cap (\bigcap_{A \in supp\mathscr{B} - \mathscr{B}_0} (A^c \cup \{x\}))) \geqslant \min(N_x \bigcap_{A \in \mathscr{B}_0} (A^c \cup \{x\})), N_x(\bigcap_{A \in supp\mathscr{B} - \mathscr{B}_0} A^c)) \geqslant \min(\inf_{A \in supp} N_x(A^c \cup \{x\}), N_x(B_x)) \geqslant \min(\inf_{A \in supp} N_x(A^c \cup \{x\}), \lambda)$.
因此有

$$1 + N_x(\bigcap_{A \in supp\mathscr{B}} (A^c \cup \{x\})) - \inf_{A \in supp\mathscr{B}} N_x(A^c \cup \{x\})$$

$$\geqslant 1 + \min(\inf_{A \in supp\mathscr{B}} N_x(A^c \cup \{x\}), \lambda) - \inf_{A \in supp\mathscr{B}} N_x(A^c \cup \{x\}) \geqslant \lambda.$$

所以 $\inf_{\mathscr{B} \leqslant \mathscr{A}} \inf_{x \in X} \min(1, 1 - N_x(\bigcap_{A \in supp\mathscr{B}} (A^c \cup \{x\})) - \inf_{A \in supp\mathscr{B}} N_x(A^c \cup \{x\})) \geqslant \lambda$. □

1.4 **定理** 对任何 $\mathscr{A} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$, 有

$\vdash LF(\mathscr{A}) \rightarrow \{(\overline{\bigcup supp\mathscr{A}}) \equiv \bigcup \{\overline{A} \mid A \in supp\mathscr{A}\}$.

证明 由 1.3 定理可得

$[(\bigcup supp\mathscr{A})' \equiv \bigcup \{A' \mid A \in supp\mathscr{A}\}] \geqslant [LF(\mathscr{A})]$. 因此

$[\overline{\bigcup supp\mathscr{A}} \equiv \bigcup \{\overline{A} \mid A \in supp\mathscr{A}\}] = [((\bigcup supp\mathscr{A})' \cup (\bigcup supp\mathscr{A})) \equiv \bigcup \{A' \cup A \mid A \in supp\mathscr{A}\}] = [((\bigcup supp\mathscr{A})' \cup (\bigcup$

$supp\mathscr{A}))\equiv((\bigcup\{A'|A\in supp\mathscr{A}\})\bigcup(\bigcup supp\mathscr{A}))]\geqslant[(\bigcup supp\mathscr{A})'$
$\equiv\bigcup\{A'|A\in supp\mathscr{A}\}]\geqslant[LF(\mathscr{A})]$. □

1.5 **引理** 设$(X,\mathscr{T})$为不分明化拓扑空间，则$\vdash(\forall x)(\forall u)(\forall A)((u\in N_x)\wedge(x\in A')\to(x\in(u\cap A)'))$.

证明 对任何x,u,A，我们有

$$\begin{aligned}A'(x)&=1-N_x(A^c\cup\{x\})=1-N_x(A^c\cup(u\cap u^c)\cup\{x\})\\&=1-N_x(((A^c\cup u)\cap(A^c\cup u^c))\cup\{x\})\\&\leqslant1-N_x(A^c\cup u\cup\{x\})\wedge N_x(A^c\cup u^c\cup\{x\})\\&=(1-N_x(A^c\cup u\cup\{x\}))\vee(1-N_x((A\cap u)^c\cup\{x\}))\\&\leqslant(1-N_x(u))\vee(A\cup u)'(x)\end{aligned}$$

当$(A\cap u)'(x)\geqslant1-N_x(u)$时，则$(A\cap u)'(x)\geqslant A'(x)\geqslant N_x(u)\otimes A'(x)$.

当$(A\cap u)'(x)<1-N_x(u)$时，则$A'(x)+N_x(u)-1\leqslant0$，从而$N_x(u)\otimes A'(x)=0$. 因此$(A\cap u)'(x)\geqslant N_x(u)\otimes A'(x)$. □

1.6 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$为不分明化拓扑空间，对任意$\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，作$\mathscr{A}_r^d\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$,

$$\mathscr{A}_r^d(B)=\begin{cases}\mathscr{A}(A), B=\xi_r(A')\\ 0\quad,\text{否则}\end{cases}$$

其中$\xi_r(A')=\{x\in X|A'(x)>r\}$，$r\in[0.1)$. 则

$\vdash LF(\mathscr{A})\to(\exists r)(LF(\mathscr{A}_r^d))$.

证明 设$[LF(\mathscr{A})]=a>a-\varepsilon>0$，其中$\varepsilon>0$是任意正数，则$\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{F(\mathscr{A}\cap v),x\in v}N_x(v)>a-\varepsilon$，因此对任何$x\in X$，存在$V_x^\varepsilon$，使$x\in V_x^\varepsilon$，$F(\mathscr{A}\cap V_x^\varepsilon)$，$N_x(V_x^\varepsilon)>a-\varepsilon$. 由于$N_x(V_x^\varepsilon)=\sup\limits_{x\in u\subseteq V_x^\varepsilon}\mathscr{T}(u)$. 故又存在$u_x^\varepsilon$，使$x\in u_x^\varepsilon\subseteq v_x^\varepsilon$，$\mathscr{T}(u_x^\varepsilon)>a-\varepsilon$，而且$F(\mathscr{A}\cap u_x^\varepsilon)$. 这样存在有限个$A_1,A_2,\cdots,A_k\in supp\mathscr{A}$，使$A_i\cap u_x^\varepsilon\neq\varnothing$，$i=1,\cdots,k$. 而对任何$A\in supp\mathscr{A}-\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$有$A\cap u_x^\varepsilon=\varnothing$. 下面证明

$\xi_{1-a}(A')\cap u_x^\varepsilon=\varnothing$. 事实上,若 $y\in\xi_{1-a}(A')\cap u_x^\varepsilon$,则 $y\in u_x^\varepsilon$,且 $y\in\xi_{1-a}(A')$. 因此 $A'(y)>1-a$. 由 1.5 引理及 $\varnothing'=\varnothing$,得 $\mathcal{T}(u_x^\varepsilon)\otimes A'(y)\leqslant N_y(u_x^\varepsilon)\otimes A'(y)\leqslant(A\cap u_x^\varepsilon)'(y)=0$. 所以有 $\mathcal{T}(u_x^\varepsilon)\otimes A'(y)=0$. 从而 $\mathcal{T}(u_x^\varepsilon)+A'(y)-1\leqslant 0$. 即 $A'(y)\leqslant 1-\mathcal{T}(u_x^\varepsilon)<1-a+\varepsilon$. 当取 ε 为相当小的数时,有 $A'(y)\leqslant 1-a$ 矛盾.

因为 $A\in supp\mathscr{A}$ 当且仅当 $\xi_{1-a}(A')\in supp\mathscr{A}_{1-a}^d$,所以 $F(\mathscr{A}\cap u_x^\varepsilon)$ 推出 $F(\mathscr{A}_{1-a}^d\cap u_x^\varepsilon)$,因此对任意 $x\in X$,存在 u_x^ε,使 $x\in u_x^\varepsilon$, $F(\mathscr{A}_{1-a}^d\cap u_x^\varepsilon)$, $N_x(u_x^\varepsilon)\geqslant\mathcal{T}(u_x^\varepsilon)>a-\varepsilon$. 取 $\varepsilon=1/n$, $n\in N$. 则对任何 $x\in X$ 有

$$\sup_{F(\mathscr{A}_{1-a}^d\cap u),\,x\in u} N_x(u)\geqslant\sup_{n\in N}N_x(u_x^{1/n})\geqslant\sup_{n\in N}\left(a-\frac{1}{n}\right)=a.$$

从而 $LF(\mathscr{A}_{1-a}^d)=\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{F(\mathscr{A}_{1-a}^d\cap u),\,x\in u}N_x(u)\geqslant a$. 因此有

$[(\exists r)(LF(\mathscr{A}_r^d))]=\sup\limits_{r\in(0,1)}[LF(\mathscr{A}_r^d)]\geqslant LF(\mathscr{A}_{1-a}^d)\geqslant a=[LF(\mathscr{A})]$. □

1.7 **定义** 设$(X,\mathcal{T})$是一不分明化拓 空间,称二元不分明谓词 $\Vdash\in\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{P}(X)),\mathcal{F}(\mathcal{P}(X)))$为不分明加细,定义为

$\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A}:=(\forall B)((B\in\mathscr{B})\to(\exists A\supseteq B)(A\in\mathscr{A}))\wedge(\forall x\in\bigcup supp\mathscr{A})(\exists B)(x\in B\in\mathscr{B})$

1.8 **定理** $\vDash(\forall\mathscr{B})(\forall\mathscr{A})(k(\mathscr{A},X)\wedge k(\mathscr{B},X)\wedge(\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\to(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})$

证明 由 $\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}$ 可推得$[k(\mathscr{A},X)]\geqslant[k(\mathscr{B},X)]$,因此只须证明对任何 $\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}$ 有$[k(\mathscr{B},X)]\leqslant[\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A}]$. 现设$[k,(\mathscr{B},X)]>\lambda>0$. 即 $\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{x\in D}\mathscr{B}(D)>\lambda$. 则对任何 $x\in\bigcup supp\mathscr{A}$,存在 D_x,使 $x\in D_x$, $\mathscr{B}(D_x)>\lambda$. 从而有 $\inf\limits_{x\in\bigcup supp\mathscr{A}}\sup\limits_{x\in D}\mathscr{B}(D)\geqslant\lambda$. 又由 $\mathscr{B}\leqslant A$,对每个 $B\in\mathcal{P}(X)$,有 $\mathscr{B}(B)\leqslant\mathscr{A}(B)$,所以 $\inf\limits_{B\in\mathcal{P}(X)}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\sup\limits_{B\subseteq A}\mathscr{A}))\geqslant\inf\limits_{B\in\mathcal{P}(X)}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{A}(B))=1$.

所以$[\mathscr{B}\ \Vdash \mathscr{A}]\geqslant 1\otimes\lambda$. □

1.9 **定理** $\vDash k(\mathscr{A},X)\wedge(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\rightarrow k(\mathscr{B},X)$

证明 若$[k(\mathscr{A},X)\wedge(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})]>\lambda>0$. 则由$[k(\mathscr{A},X)]>\lambda$得$\inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{x\in D}\mathscr{A}(D)>\lambda$. 所以对任何$x\in X$, 存在$D_x$, 使$x\in D_x$, $\mathscr{A}(D_x)>\lambda$. 从而$D_x\in supp\mathscr{A}$. 所以$X\subseteq\bigcup\limits_{x\in X}D_x\subseteq\bigcup supp\mathscr{A}$, 即$X=\bigcup supp\mathscr{A}$. 再由$[\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A}]>\lambda$得$\inf\limits_{x\in\bigcup supp\mathscr{A}=X}\sup\limits_{x\in B}\mathscr{B}(B)>\lambda$. 从而$[k(\mathscr{B},X)]>\lambda$.

1.10 **定理** $\vDash(\mathscr{C}\Vdash\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\rightarrow(\mathscr{C}\Vdash\mathscr{A})$

证明 若$[(\mathscr{C}\Vdash\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})]>\lambda>0$, 则由

$$(\inf_{c\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-\mathscr{C}(C)+\sup_{c\leqslant B}\mathscr{B}(B))\otimes\inf_{x\in\bigcup supp\mathscr{B}}\sup_{x\in c}\mathscr{C}(c)\otimes$$
$$(\inf_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\sup_{B\leqslant A}\mathscr{A}(A))\otimes\inf_{x\in\bigcup supp\mathscr{A}}\sup_{x\in B}\mathscr{B}(B))>\lambda$$

可得$(\inf\limits_{c}\min(1,1-\mathscr{C}(c)+\sup\limits_{c\leqslant B}\mathscr{B}(B))\otimes\inf\limits_{B}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\sup\limits_{B\subseteq A}\mathscr{A}(A)))\otimes(\inf\limits_{x\in\bigcup supp\mathscr{B}}\sup\limits_{x\in c}\mathscr{C}(c)\otimes\inf\limits_{x\in\bigcup supp\mathscr{A}}\sup\limits_{x\in B}\mathscr{B}(B))>\lambda$.

令$\alpha=\inf\limits_{c}\min(1,1-\mathscr{C}(c)+\sup\limits_{c\subseteq B}\mathscr{B}(B))\otimes\inf\limits_{B}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\sup\limits_{B\subseteq A}\mathscr{A}(A))$,

$\beta=\inf\limits_{x\in\bigcup supp\mathscr{B}}\sup\limits_{x\in c}\mathscr{C}(c)\otimes\inf\limits_{x\in\bigcup supp\mathscr{A}}\sup\limits_{x\in B}\mathscr{B}(B)$.

则由$\alpha\otimes\beta>\lambda$, 得$\alpha>\lambda+1-\beta$. 取$\lambda'$, 使$\alpha>\lambda'>\lambda+1-\beta$. 因此对任何$c\in\mathscr{P}(X)$, 存在$B$, 使得$c\subseteq B$, 对此$B$, 又存在$A$, 使$B\subseteq A$, 而且$1-\mathscr{C}(c)+\mathscr{B}(B)+1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{A}(A)-1>\lambda'$, 即对任何$c\in\mathscr{P}(X)$, 存在$A$, 使$c\subseteq A$且$1-\mathscr{C}(c)+\mathscr{A}(A)>\lambda'$; 所以$\inf\limits_{c\in\mathscr{P}(X)}\sup\limits_{c\subseteq B}(1-\mathscr{C}(c)+\mathscr{A}(A))\geqslant\lambda'$. 从而有$r=\inf\limits_{c\in\mathscr{P}(X)}\sup\limits_{c\subseteq B}\min(1,1-\mathscr{C}(c)+\sup\limits_{c\subseteq A}\mathscr{A}(A))\geqslant\lambda'>\lambda+1-\beta$. 即$\beta>\lambda+1-r$. 取$r''$, 使$\beta>\lambda''>\lambda+1-r$. 则对任何$x\in\bigcup supp\mathscr{A}$, 存在$B$, 使$x\in B$, $\mathscr{B}(B)>\lambda''>0$. 由于$B\in supp\mathscr{B}$, 所以$x\in\bigcup supp\mathscr{B}$. 因此又存在$c$, 使$x\in c$, $\mathscr{C}(c)>\lambda''$. 这样对任何$x\in\bigcup supp\mathscr{A}$, 存在$c$, 使$x\in c$, $\mathscr{C}(c)>\lambda''$. 从而有$\inf\limits_{x\in\bigcup supp\mathscr{A}}\sup\limits_{x\in c}\mathscr{C}(c)\geqslant\lambda''>\lambda+1-r$. 因此$r+\inf\limits_{x\in\bigcup supp\mathscr{A}}\sup\limits_{x\in c}\mathscr{C}(c)-1>$

λ. 即$[\mathscr{C} \Vdash \mathscr{A}] = \max(0, \inf_c \min(1, 1-\mathscr{C}(c) + \sup_{c\subseteq A}\mathscr{A}(A)) + \inf_{x\in\bigcup supp\mathscr{A}} \sup_{x\in c}\mathscr{C}(c) - 1) > \lambda$. □

1.11 **定义** 设$(X,\mathscr{T})$为不分明化拓扑空间,称一元不分明谓词$LF_\sigma \in \mathscr{F}(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)))$为不分明$\sigma$局部有限,定义为

$$LF_\sigma(\mathscr{A}) := (\exists\Omega\in\mathscr{P}(\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))))(((\biguplus\Omega = \mathscr{A}\wedge c(\Omega))\rightarrow (\forall\mathscr{B})(\mathscr{B}\in\Omega\rightarrow LF(\mathscr{B})))$$

其中$\biguplus$表示无交并,即若$\biguplus_{i\in I}\mathscr{U}_i = \mathscr{A}$,则对任何$i\neq j$有$\mathscr{U}_i\cap\mathscr{U}_j = \varnothing$;$c(\Omega)$表示$\Omega$是可数集.

1.12 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$为不分明化拓扑空间,则$\models T_3(X,\mathscr{T})\,\mathsf{A}((\forall\mathscr{A})(k_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{B})(LF_\sigma(\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\,\mathsf{A}(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}))))\rightarrow T_4(X,\mathscr{T})$.

证明 令$\alpha = [(\forall\mathscr{A})(k_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists B)(LF_a(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\,\mathsf{A}(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}))))]$

再设$[T_3'(X;\mathscr{T})]\otimes\alpha > \lambda > 0$. 则有$\inf_{x\in w}(\mathscr{T}(w)\propto\sup_r(N_x(v)\wedge\inf_{y\in w^c}N_y(v^c)))\otimes\inf_{\mathscr{A}}([k_0(\mathscr{A},X)\propto\sup_{\mathscr{B}}(LF_\sigma(\mathscr{B})]\wedge([\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A}]\otimes[\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}]))) > \lambda$. 因此对任何$x\in A\subseteq w$,有$sup(N_x(v)\wedge\inf_{y\in w^c}N_y(v^c)) > (\alpha\propto\lambda)\otimes\mathscr{T}(w)$. 令$(\alpha\propto\lambda)\otimes\mathscr{T}(w) = \mu$. 则存在$v_x$,使$x\in v_x$, $N_x(v_x) > \mu$,且对任何$y\in w^c$, $N_y(v_x^c) > \mu$. 因为$N_x(v_x) = \sup_{x\in D\subseteq v_x}\mathscr{T}(D)$. 因而又存在$D_x$,使$x\in D_x\subseteq v_x$, $\mathscr{T}(D_x) > \mu$. 而且对任何$y\in w^c$, $N_y(D_x^c)\geqslant N_y(r_x^c) > \mu$. 现取$\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$,使得对任何$D\in\mathscr{P}(X)$,有

$$\mathscr{A}(D) = \begin{cases}\mathscr{T}(D_x), D = D_x, x\in A\\ \mathscr{T}(A^c), D = A^c\\ 0 \qquad 否则\end{cases}$$

则$[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}] = 1$,

$$[k(\mathscr{A},X)]=\inf_{x\in X}\sup_{x\in D}\mathscr{A}(D)=\inf_{x\in A}\sup_{x\in D_x}\mathscr{A}(D_x)\wedge\inf_{x\in A^c}\mathscr{A}(A^c)$$
$$\geqslant\inf_{x\in A}\mathscr{T}(D_x)\wedge\mathscr{T}(A^c)\geqslant\mu\wedge\mathscr{T}(A^c).$$

因此$[k_0(\mathscr{A},X)]\geqslant\mu\wedge\mathscr{T}(A^c)=((a\propto\lambda)\otimes\mathscr{T}(w))\wedge\mathscr{T}(A^c)\geqslant(a\propto\lambda)\otimes(\mathscr{T}(w)\wedge\mathscr{T}(A^c))$. 从而$((\mathscr{T}(w)\wedge\mathscr{T}(A^c))\propto[k_0(\mathscr{A},X)])\otimes a\geqslant\lambda>\lambda-\varepsilon(\varepsilon>0)$. 即$((\mathscr{T}(w)\wedge\mathscr{T}(A^c))\propto[k_0(\mathscr{A},X)])\otimes([k_0(\mathscr{A},X)]\propto\sup_{\mathscr{B}}[LF_\sigma(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}))]>\lambda-\varepsilon$.

因为对任何 $a、b、c\in[0,1]$, 有$(a\propto b)\otimes(b\propto c)\leqslant(a\propto c)$. 因此$(\mathscr{T}(w)\wedge\mathscr{T}(A^c))\propto\sup_{\mathscr{B}}[LF_\sigma(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}))]>\lambda-\varepsilon$. 从而存在 $\mathscr{B}^\varepsilon$, 使$[LF_\sigma(\mathscr{B}^\varepsilon)]>(\lambda-\varepsilon)\otimes(\mathscr{T}(w)\wedge\mathscr{T}(A^c))=\delta$, $[(\mathscr{B}^\varepsilon\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}^\varepsilon\subseteq\mathscr{T})])>\delta$. 由后一个不等式可得

$$\inf_B\min(1,1-\mathscr{B}^\varepsilon(B)+\sup_{B\subseteq D}(\mathscr{A}(D))\otimes\inf_{x\in X}\sup_{x\in B}\mathscr{B}^\varepsilon(B)\otimes\inf_B\min(1,1-\mathscr{B}^\varepsilon(B)+\mathscr{T}(B))>\delta.$$

令 $\inf_B\min(1,1-\mathscr{B}^\varepsilon(B)+\sup_{B\subseteq D}\mathscr{A}(D))=s$,

$\inf_B\min(1,1-\mathscr{B}^\varepsilon(B)+\mathscr{T}(B))=t$

则 $\inf_{x\in X}\sup_{x\in B}\mathscr{B}^\varepsilon(B)>\delta+2-s-t$. 故对任何 $x\in X$, 存在 B_x^ε, 使 $x\in B_x^\varepsilon$, $\mathscr{B}^\varepsilon(B_x^\varepsilon)>\delta+2-s-t$.

这样便有

$$\mathscr{B}^\varepsilon(B_x^\varepsilon)\otimes\inf_B\min(1,1-\mathscr{B}^\varepsilon(B)+\mathscr{T}(B))>\delta+2-s-t+t-1$$
$$=\delta+1-s\geqslant\delta.$$

进而有 $\mathscr{B}^\varepsilon(B_x^\varepsilon)+1-\mathscr{B}^\varepsilon(B_x^\varepsilon)+\mathscr{T}(B_x^\varepsilon)-1=\mathscr{T}(B_x^\varepsilon)>\delta$. 另一方面, 由$\inf_B\min(1,1-\mathscr{B}^\varepsilon(B)+\sup_{B\subseteq D}\mathscr{A}(D))\otimes\mathscr{B}(B_x^\varepsilon)>\delta$ 可得 $\sup_{B_x^\varepsilon\subseteq D}\mathscr{A}(D)>\lambda$. 即存在 $D_{x(B)}$, 使 $B_x^\varepsilon\subseteq D_{x(B)}$, $\mathscr{A}(D_{x(B)})=\mathscr{T}(D_{x(B)})>\delta$. 我们取 $\mathscr{B}^{\varepsilon'}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$, 使

$$\mathscr{B}^{\varepsilon'}(B)=\begin{cases}\mathscr{B}^\varepsilon(B_x^\varepsilon), B=B_x^\varepsilon, x\in A\\ 0\quad ,\text{否则}\end{cases}$$

则有 $\mathscr{B}^{\varepsilon'} \leqslant \mathscr{B}^{\varepsilon}$, $\mathscr{B}^{\varepsilon'} \cap \mathscr{B}^{\varepsilon} = \mathscr{B}^{\varepsilon'}$. 再由 $[LF_{\sigma}(\mathscr{B}^{\varepsilon})] = \sup\limits_{\Omega \in \mathscr{H}(\mathscr{F}(\mathscr{F}(X)))c(\Omega)\ \uplus\Omega = \mathscr{B}^{\varepsilon}}$ $\inf\limits_{\mathscr{U}\in\Omega}[LF(\mathscr{U})] > \delta$, 得到存在 $\Omega = \{\mathscr{D}_i^{\varepsilon} \mid i \in N\}$, 使 $\uplus\Omega = \biguplus\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{D}_i^{\varepsilon} = \mathscr{B}^{\varepsilon}$. 且对任何 $i \in N$, $[LF(\mathscr{D}_i^{\varepsilon})] > \delta$. 取 $\mathscr{D}_i^{\varepsilon'} = \mathscr{D}_i^{\varepsilon} \cap \mathscr{B}^{\varepsilon'}$. $\Omega' = \{\mathscr{D}_i^{\varepsilon'} \mid i \in N\}$, 则 $\uplus\Omega' = \biguplus\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{D}_i^{\varepsilon'} = \mathscr{B}^{\varepsilon'} \cap B^{\varepsilon} = \mathscr{B}^{\varepsilon'}$. 因为 $\mathscr{D}_i^{\varepsilon'} \leqslant \mathscr{D}_i^{\varepsilon}$, 所以 $[LF(\mathscr{D}_i^{\varepsilon'})] \geqslant [LF(\mathscr{D}_i^{\varepsilon})] > \delta$. 同时对任何 $x \in X$, 存在 $u_x^{\varepsilon(i)}$, 使 $x \in u_x^{\varepsilon(i)}$, $N_x(u_x^{\varepsilon(i)}) > \delta$, 且 $F(\mathscr{D}_i^{\varepsilon} \cap u_x^{\varepsilon(i)})$. 因而只存在有限个 $B_1^{\varepsilon}, B_2^{\varepsilon}, \cdots, B_{m_i}^{\varepsilon} \in supp\mathscr{D}_i^{\varepsilon} \subseteq supp\mathscr{B}^{\varepsilon}$, 使 $B_i^{\varepsilon} \cap u_x^{\varepsilon(i)} \neq \varnothing$, $j = 1, 2, \cdots, m_i$, 作 $u_i^{\varepsilon} = \bigcup\limits_{j=1}^{m_i} B_j^{\varepsilon}$, 则 $\mathscr{T}(u_i^{\varepsilon}) = \mathscr{T}(\bigcup\limits_{j=1}^{m_i} B_j^{\varepsilon}) \geqslant \min\mathscr{T}(B_j^{\varepsilon}) \geqslant \delta$. 由于对任何 $x \in A$, $B_x^{\varepsilon} \subseteq D_{x(B)}$, 所以 $N_y((B_x^{\varepsilon})^c) \geqslant N_y(D_{x(B)}^c) > \mu \geqslant \delta$. 从而对任何 $y \in w^c$, 有 $N_y((u_j^{\varepsilon})^c) = N_y(\bigcap\limits_{j=1}^{m_i}(B_j^{\varepsilon})^c) \geqslant \inf N_y((B_j^{\varepsilon})^c) \geqslant \delta$. 显然 $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} u_i^{\varepsilon} \subseteq w$. 令 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} u_i^{\varepsilon} = u^{\varepsilon}$, 则 $\mathscr{T}(u^{\varepsilon}) \geqslant \inf\mathscr{T}(u_i^{\varepsilon}) \geqslant \delta$, $\inf\limits_{y\in w^c} N_y((u^{\varepsilon})^c) \geqslant \delta$. 从而 $\mathscr{T}(u^{\varepsilon}) \wedge \inf\limits_{y\in w^c} N_y((u^{\varepsilon})^c) \geqslant \delta$. 现令 $\varepsilon = 1/n$, $n \to \infty$, 则 $\sup\limits_{A\subseteq B}(\mathscr{T}(u) \wedge \inf\limits_{y\in w^c} N_y((u^c)) \geqslant \sup\limits_{n\in N}(\mathscr{T}(u^{\frac{1}{n}}) \wedge \inf\limits_{y\in w^c} N_y((u^{\frac{1}{n}})^c) \geqslant \sup\limits_{n\in N}((\lambda - \varepsilon) \otimes (\mathscr{T}(w) \wedge \mathscr{T}(A^c))) = \lambda \otimes (\mathscr{T}(w) \wedge \mathscr{T}(A^c))$. 从而有 $(\mathscr{T}(w) \wedge \mathscr{T}(A^c)) \propto \sup\limits_{A\subseteq u}(\mathscr{T}(u) \wedge \inf\limits_{y\in w^c} N_y(u^c)) \geqslant \lambda$. 再由 A, w 的任意性, 可得

$$[T_4(X, \mathscr{T})] = \inf_{A\subseteq w}((\mathscr{T}(w) \wedge \mathscr{T}(A^c) \propto \sup_{A\subseteq u}(\mathscr{T}(u) \wedge \inf_{y\in w^c} N_y(u^c)) \geqslant \lambda. \quad \square$$

§2　不分明化拓扑中的仿紧性

在§1的基础上, 接下来在不分明化拓扑中刻画人们广为关注的拓扑学中一个重要内容——仿紧性.

2.1 **定义** 设 Σ 为不分明化拓扑空间类，称一元不分明谓词 $PC\in\mathscr{F}(\Sigma)$ 为不分明化仿紧的，定义为

$pc(X,\mathscr{T}):=(\forall\mathscr{A})(k_0(\mathscr{A},X)\rightarrow\exists\mathscr{B}(LF(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}))).$

2.2 **引理** 对任何 $(X,\mathscr{T})\in\Sigma$. 设

$\sigma_1(X,\mathscr{T}):=(\forall\mathscr{A})(k_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{B})(LF_\sigma(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T})))).$

$\sigma_2(X,\mathscr{T}):=(\forall\mathscr{A})(k_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{B})(LF(\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})))$

则 $\models\sigma_1(X,\mathscr{T})\rightarrow\sigma_2(X,\mathscr{T})$.

证明 设 $[\sigma_1(X,\mathscr{T})]>\lambda>0$，则对任何 $\mathscr{A}$，有

$[(\exists\mathscr{B})(LF_\sigma(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T})))]>\lambda-1+[k_0(\mathscr{A},X)]$. (1)

对任意 $\varepsilon>0$，设 $[k_0(\mathscr{A},X)]=\beta>\beta-\varepsilon>0$. 则对任何 $x\in X$，存在 A_x，使 $x\in A_x$，$\mathscr{A}(A_x)>\beta-\varepsilon$，$\mathscr{T}(A_x)>\beta-\varepsilon$. 取 $A^\varepsilon\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$.

$$\mathscr{A}^\varepsilon(A)=\begin{cases}\mathscr{A}(A_x), & A=A_x, x\in X\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

则 $[k_0(\mathscr{A}^\varepsilon,X)]\geqslant\beta-\varepsilon$，$\bigcup supp\mathscr{A}^\varepsilon=X$.

由(1)式可得

$[(\exists\mathscr{B})(LF_\sigma(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A}^\varepsilon)\wedge(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T})))]>\lambda-1+[k_0(\mathscr{A}^\varepsilon,X)]\geqslant\lambda-1+\beta-\varepsilon=\mu$.

则存在 $\mathscr{B}^\varepsilon$，使 $[LF_\sigma(\mathscr{B}^\varepsilon)]>\mu$，$[(\mathscr{B}^\varepsilon\Vdash\mathscr{A}^\varepsilon)\wedge(\mathscr{B}^\varepsilon\subseteq\mathscr{T})]>\mu$. 由后一个等式可知对任何 $x\in X$，存在 B_x，使 $x\in B_x$，$\mathscr{B}^\varepsilon(B_x)>\mu$，$\mathscr{T}(B_x)>\mu$，并且存在 $A_{x(B)}$，使 $B_x\subseteq A_{x(B)}$，$\mathscr{A}^\varepsilon(A_{x(B)})=\mathscr{A}(A_{x(B)})>\mu$.

取 $\mathscr{B}^{\varepsilon'}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$

$$\mathscr{B}^{\varepsilon'}(B)=\begin{cases}\mathscr{B}^\varepsilon(B_x), & B=B_x, x\in X\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

则 $[k_0(\mathscr{B}^{\varepsilon'},X)]\geqslant\mu$，$supp\mathscr{B}^{\varepsilon'}=\{B_x\mid x\in X\}$，因为 $\mathscr{B}^\varepsilon\supseteq\mathscr{B}^{\varepsilon'}$，所以

$[LF_\sigma(\mathscr{B}^{\varepsilon'})]\geqslant[LF(\mathscr{B}^\varepsilon)]>\mu$，故存在 $\Omega=\{\mathscr{U}_i\mid i\in N\}$，使 $\bigcup\limits_{i\in N}\mathscr{U}_i=\mathscr{B}^{\varepsilon'}$，且对任何 $i\in N$，有 $[LF(\mathscr{U}_i)]>\mu$，从而对任何 $x\in X$，存在 $u_x^{(i)}$，使得存在有限集 $\mathscr{U}_i^*=\{c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_{n_i}}\}\subseteq supp(\mathscr{U}_i)$，$c_{i_k}\cap u_x^{(i)}\neq\varnothing$，$k=1,2,\cdots,n_i$，$N_x(u_x^{(i)})>\mu$，而且对任何 $c\in supp\,\mathscr{U}_i-\mathscr{U}_i^*$，有 $c\cap u_x^{(i)}=\varnothing$，因为 $\bigcup\limits_{i\in N}\mathscr{U}=\mathscr{B}^{\varepsilon'}$，故对任何 $B\in supp\mathscr{B}^{\varepsilon'}$，有唯一存在的 $k\in N$，使 $\mathscr{U}_k(B)=\mathscr{B}^{\varepsilon'}(B)>\mu$. 现对每个 $B\in supp\mathscr{B}^{\varepsilon'}$，取 $B_k^*=B-\bigcup\limits_{i<k}(\bigcup supp\,\mathscr{U}_i)$，$\mathscr{C}_k=\{B_k^*\mid\mathscr{U}_k(B)>\mu\}$，$\mathscr{C}=\bigcup\limits_{k\in N}\mathscr{C}_k$，再取 $\mathscr{D}^\varepsilon\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，使

$$\mathscr{D}^\varepsilon(D)=\begin{cases}\mu, & D=B_k^*,k\in N\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

我们可以证得 $[\mathscr{D}^\varepsilon\Vdash\mathscr{A}]=\mu$，$[LF(\mathscr{D}^\varepsilon)]\geqslant\mu$. 因此 $[LF(\mathscr{D}^\varepsilon)\wedge(\mathscr{D}^\varepsilon\Vdash\mathscr{A})]\geqslant\mu=\lambda-1+\beta-c$. 若取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，则 $[(\exists\mathscr{D})(LF(\mathscr{D})\wedge(\mathscr{D}\Vdash\mathscr{A}))]\geqslant\sup\limits_{\mathscr{D}^{\frac{1}{n}}}[LF(\mathscr{D}^{\frac{1}{n}})\wedge(\mathscr{D}^{\frac{1}{n}}\Vdash\mathscr{A})]\geqslant\sup\limits_{n\in N}(\lambda-1+\beta-\dfrac{1}{n})=\lambda-1+\beta=\lambda-1+[k_0(\mathscr{A},X)]$，从而得到 $[(\forall\mathscr{A})(k_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{D})(LF(\mathscr{D})\wedge(\mathscr{D}\Vdash\mathscr{A})))]=[\sigma_2(X,\mathscr{T})]\geqslant\lambda$. □

2.3 **引理** 对任何 $(X,\mathscr{T})\in\Sigma$，设

$\sigma_3(X,\mathscr{T}):=(\forall\mathscr{A})(k_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists\mathscr{B})(LF(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}))))$.

则 $\vdash T_3(X,\mathscr{T})\rightarrow(\sigma_2(X,\mathscr{T})\rightarrow\sigma_3(X,\mathscr{T}))$.

证明 只需证明 $[T_3(X,\mathscr{T})]\otimes[\sigma_2(X,\mathscr{T})]\leqslant[\sigma_3(X,\mathscr{T})]$. 设 $[T_3(X,\mathscr{T})]\otimes[\sigma_1(X,\mathscr{T})]>\lambda>0$，则对任何 $\mathscr{A}$，有

$[T_3(X,\mathscr{T})]\otimes[k_0(\mathscr{A},X)\rightarrow(\exists(\mathscr{B}))(LF(\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A}))]>\lambda$. (2)

令 $[k_0(\mathscr{A},X)]=\beta>\beta-\varepsilon$. 对任何 $\varepsilon>0$，则对任何 $x\in X$，存在 A_x，使 $x\in A_x$，$\mathscr{A}(A_x)>\beta-\varepsilon$，$\mathscr{T}(A_x)>\beta-\varepsilon$. 在集合 $\{A_x\mid x\in X\}$

中删去重复出现的元素，得$\{A_s | s\in S\}$，则对任何 x，存在 $s(x)\in S$，使 $x\in A_{s(x)}$，再令$[T_3(X,\mathscr{T})]=r>r-\delta>\lambda$，其中 $r-\lambda>\delta>0$. 则对任何 $x\in A_{s(x)}$ 有$\sup\limits_{x\in v}(\mathscr{T}(v)\wedge \inf\limits_{y\in A^c_{s(x)}}(N_y(V^c))>\max(0, r-\delta-1+\beta-\varepsilon)=p$. 因此存在 v_x，使 $x\in V_x\subseteq A^c_{s(x)}$，$\mathscr{T}(v_x)<\rho$. 且对任何 $y\in A^c_{s(x)} N_y(v^c_x)>\rho$. 取 $\mathscr{A}^{\varepsilon-\delta}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$.

$$\mathscr{A}^{\varepsilon-\delta}(v)=\begin{cases}\mathscr{T}(v_x), v=v_x, x\in X\\ 0 \quad 否则\end{cases}$$

则$[k_0(\mathscr{A}^{\varepsilon-\delta},X)]>\rho$，$\bigcup supp\mathscr{A}^{\varepsilon-\delta}=X$，由(2)式得

$$[(\exists\mathscr{B})(LF(\mathscr{B})\wedge(\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A}^{\varepsilon-\delta}))]>\max(0,\lambda-1+\beta-\delta-\varepsilon)=\mu.$$

因此存在 $\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}$，使$[LF(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta})]>\mu$ 和$[\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}\Vdash\mathscr{A}^{\varepsilon-\delta}]>\mu$. 由前一个不等式得，对任何 $x\in X$，存在 E_x，使 $F(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}\cap E_x)$，$N_x(E_x)>\mu$. 由后一个不等式得，对任何 $x\in X$，存在 D_x，使 $x\in D_x$，$\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}(D_x)>\mu$. 在集合$\{D_x | x\in X\}$中删去重复出现的元素，得$\{D_t | t\in T\}$. 则对每一个 D_t，又存在 $x(t)\in X$，使 $D_x\subseteq V_{x(t)}\subseteq A_{s\circ x(t)}$，且 $\mathscr{A}^{\varepsilon-\delta}(v_{x(t)})>\mu$. 因为对任何 $y\in A^c_{s\circ x(t)}$，有 $N_y(D^c_t)\geqslant N_y(V^c_{x(t)})>\rho>\mu$，故由 $N_y(D^c_t)=\sup\limits_{y\in w^c\subseteq D^c_t}\mathscr{T}(w^c)$可得存在 w_t，使 $D_t\subseteq w_t\subseteq A_{s\circ x(t)}$，$\mathscr{T}(w^c)>\mu$，对任何 $s\in S$，令 $F_s=\bigcup\{w_t | t\in T, s\circ x(t)=s\}$，显然 $F_s\subseteq A_s$，取 $\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$.

$$\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta}(u)=\begin{cases}\mu, u=F_s, s\in S\\ 0 \quad ,否则\end{cases}$$

则我们可证得$[\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta}\subseteq\mathscr{F}]=1$. $[LF(\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta})]\geqslant\mu$，$[\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta}\Vdash\mathscr{A}]=\mu$.

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，$\delta=\dfrac{1}{m}$，$n, m\in N$，则对任何 $\mathscr{A}$，

$$[(\exists\mathscr{D})(LF(\mathscr{D}\wedge((\mathscr{D}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{D}\subseteq\mathscr{F}))]$$

$$\geqslant\sup_{\mathscr{D}^{(\frac{1}{n},\frac{1}{m})}}[LF(\mathscr{D}^{(\frac{1}{n},\frac{1}{m})})\wedge((\mathscr{D}^{(\frac{1}{n},\frac{1}{m})}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}^{(\frac{1}{n},\frac{1}{m})})\subseteq\mathscr{F}))]$$

$\geqslant \sup_{n,m\in N}(\lambda-1+\beta-\frac{1}{n}-\frac{1}{m})=\lambda-1+\beta=\lambda-1+[k_0(\mathscr{A},X)]$.

因而有$[\sigma_3(X,\mathscr{T})]=[(\forall A)(k_0(\mathscr{A},X)\to(\exists(\mathscr{D})(LF(\mathscr{D})\wedge((\mathscr{D}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{D}\subseteq\mathscr{F}))]\geqslant\lambda$. □

2.4 **引理** 对任何$(X,\mathscr{T})\in\Sigma$,有

$\vDash\sigma_3^2(X,\mathscr{T})\to pc(X,\mathscr{T})$

其中$\sigma_3^2(X,\mathscr{T}):=\sigma_3(X,\mathscr{T})\wedge\sigma_3(X,\mathscr{T})$.

证明 对任意$\varepsilon>0$,设$[\sigma_3(X,\mathscr{T})]=\lambda>\lambda-\varepsilon->0$,则对任何$\mathscr{A}$,

$[(\exists\mathscr{B})(LF(\mathscr{B})\wedge((\mathscr{B}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{B}\subseteq\mathscr{F})))]>1-\varepsilon-1+[k_0(\mathscr{A},X)]$.

对任意$\delta>0$,令$[k_0(\mathscr{A},X)]=\beta>\beta-\delta$,则存在$\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}$,则存在$\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}$,使对任何$x\in X$,存在$B_x$,$\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}(B_x)>\lambda-\varepsilon$,$\mathscr{T}(B_x^{\varepsilon})>\lambda-\varepsilon$,且存在$A_{x(B)}$,使$B_x\subseteq A_{x(B)}$,$\mathscr{T}(A_{x(B)})>\beta-\delta>\lambda-\varepsilon-1+\beta-\delta=\mu$. $\mathscr{A}(A_{x(B)})>\mu$. 取$\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)$

$$\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}(B)=\begin{cases}\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}(B_x), & B=B_x,x\in X\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

则$[K_0(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'},X)]\geqslant\mu$, $supp\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}=\{B_x\mid x\in X\}$,而且$[LF(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'})]\geqslant[LF(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta})]>\mu$. 因此对任何$x\in X$,存在$u_x$,使$F(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}\cap u_x)$, $N_x(u_x)>\mu$. 从而存在v_x,使$x\in v_x\subseteq u_x$, $\mathscr{T}(v_x)>\mu$. 取$\mathscr{V}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$,

$$\mathscr{V}(v)=\begin{cases}\mathscr{T}(V_x), & v=v_x,x\in X\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

则$[k_0(\mathscr{V},X)]\geqslant\mu$. 对于$\mathscr{V}$,我们又有

$[(\exists\mathscr{D})(LF(\mathscr{D})\wedge((\mathscr{D}\Vdash\mathscr{V})\wedge(\mathscr{D}\subseteq\mathscr{F})))]>\lambda-\varepsilon-1+[k_0(\mathscr{V},X)]\geqslant\lambda-\varepsilon-1+\mu$.

于是又存在$\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$,

$$\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta}(D)=\begin{cases}\mathscr{T}((D)_x^{\varepsilon}). & D=D_x, x\in X\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

其中对任何 $x\in X$，有 D_x 使 $x\in D_x$，$\mathscr{T}(D_x^{\varepsilon})>\lambda-\varepsilon$，且存在 $V_{x(D)}$，使 $D_x\subseteq V_{x(D)}$，同时又有 $[LF(\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta})]>\lambda-\varepsilon-1+\mu$. 现对每一个 $B_x\in supp\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}$，令 $B_x^*=(\bigcup\{D\in supp\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta}\mid B_x\cap D=\varnothing\})^c$，则 $\mathscr{T}(B_x^*)\geqslant\inf\limits_{D\cap B_x=\varnothing}\mathscr{T}(D^c)\geqslant\lambda-\varepsilon>\lambda-\varepsilon-1+\mu$. 再令 $w_x=B_x^*\cap A_x$，取 $\mathscr{W}^{\varepsilon-\delta}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，使

$$\mathscr{W}^{\varepsilon-\delta}(w)=\begin{cases}\lambda-\varepsilon-1+\mu, & w=w_x, x\in X,\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

则容易得到 $[\mathscr{W}^{\varepsilon-\delta}\subseteq\mathscr{T}]=1$，$[\mathscr{W}^{\varepsilon-\delta}\Vdash\mathscr{A}]=\lambda-\varepsilon-1+\mu$. 而且由于 $[LF(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'})]>\mu$，因此对任何 $x\in X$，存在 G_x，使 $x\in G_x$，$F(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}\cap G_x)$，$N_x(G_x)>\mu$. 由于 $\bigcup\limits_{x\in X}D_x=X\supseteq G_x$，所以存在有限多个 $D_{x_1},D_{x_2},\cdots,D_{x_k}$，使得 $G_x\subseteq D_{x_1}\cup D_{x_2}\cup\cdots\cup D_{x_k}$，其中 $D_{x_i}\subseteq V_{x_i(D)}$，$i=1,2,\cdots,k$. 因为对任何 V_x，有 $V_x\subseteq u_x$，所以由 $F(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}\cap u_x)$ 推出 $F(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta}\cap V_x)$，从而对每个 D_{x_i}，有 $F(\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}\cap D_{x_i})$. 再由于对任何 $D\in supp\mathscr{D}^{\varepsilon-\delta}$ 和 $B\in supp\mathscr{B}^{\varepsilon-\delta'}$，$D\cap B^*=\varnothing$ 当且仅当 $D\cap B=\varnothing$，因此对每个 D_x，有 $F(\mathscr{W}^{\varepsilon-\delta}\cap D_{x_i})$，从而 $F(\mathscr{W}^{\varepsilon-\delta}\cap G_x)$，所以 $[LF(\mathscr{W}^{\varepsilon-\delta})]\geqslant\mu$. 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，$\delta=\dfrac{1}{m}$，$n,m\in N$，容易得到对任何 $\mathscr{A}$ 有

$$[k_0(\mathscr{A},X)\to(\exists\mathscr{W})(LF(\mathscr{W})\wedge((\mathscr{W}\Vdash\mathscr{A})\wedge(\mathscr{W}\subseteq\mathscr{T})))]$$
$$\geqslant\lambda-1+\lambda，\text{从而}[PC(X,\mathscr{T})]\geqslant\lambda-1+\lambda.$$

因此 $[\sigma_3(X,\mathscr{T})\to PC(X,\mathscr{T})]\geqslant[\sigma_3(X,\mathscr{T})]$，即

$$[PC(X,\mathscr{T})]\geqslant[\sigma_3^2(X,\mathscr{T})].\quad\square$$

2.5 **定理** 对任何 $(X,\mathscr{T})\in\Sigma$，有

$\vdash T_3(X,\mathscr{T})\to((PC(X,\mathscr{T})\to\sigma_1(X,\mathscr{T}))\wedge(\sigma_1(X,\mathscr{T})\to$

$\sigma_2(X,\mathscr{T})) \wedge (\sigma_2(X,\mathscr{T}) \to \sigma_3(X,\mathscr{T})) \wedge (\sigma_3^2(X,\mathscr{T}) \to PC(X,\mathscr{T})))$.

证明　由本节所给出的定义和引理即可得到. □

§3　S—紧性和 θ—紧性

本节我们在不分明化拓扑中分别用半开集和 θ—开集刻划 S—紧性和 θ—紧性。

3.1　**定义**　(1)设 Σ 是一类不分明化拓扑空间，一元不分明谓词 $\Gamma_s \in \mathscr{F}(\Sigma)$ 称为不分明 S—紧性，定义为

$\Gamma_s(X,\mathscr{T}) := (\forall \mathscr{A})(k_s(\mathscr{A}, X) \to (\exists \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}) \wedge k(\mathscr{D}, X) \wedge FF(\mathscr{D})))$

其中 $k_s(\mathscr{A}, X) := k(\mathscr{A}; X) \wedge (\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}_s)$.

(2)设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，$A \subseteq X$，则 $\Gamma_s(A) := \Gamma_s(A, \mathscr{T}|A)$.

3.2　**定理**　对于任意不分明化拓扑空间$(X,\mathscr{T})$和 $A \subseteq X$，有

$\models (\forall \mathscr{A})(k_s(\mathscr{A}, A) \to (\exists \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}) \wedge k(\mathscr{D}, \mathscr{A}) \wedge FF(\mathscr{D}))) \to \Gamma_s(A)$.

其中 k_s 是关于 $\mathscr{T}$ 的 .

证明　$\forall \mathscr{A} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(A))$，若$[\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}_s^A] = \inf\limits_{B \subseteq A} \min(1, 1 - \mathscr{A}(B) + \mathscr{T}_s^A(B)) = \lambda$，则$\forall n \in N$ 和$B \subseteq A$，有

$\mathscr{T}_s^A(B) = sup\{\mathscr{T}|A(c) \mid C \subseteq B, B \subseteq Cl_A C\} > \lambda + \mathscr{A}(B) - 1 - \frac{1}{n}$，故而存在 $C_B \subseteq B$，使得 $B \subseteq Cl_A C_B$ 且 $\mathscr{T}|A(C_B) > \lambda + \mathscr{A}(B) - 1 - \frac{1}{n}$，进而有 $u \subseteq X$，使得 $C_B = u \cap A$ 且 $\mathscr{T}(u) > \lambda + \mathscr{A}(B) - 1 - \frac{1}{n}$，

$\mathscr{T}_s(u \cup B) = \sup\limits_{\substack{E \\ E \subseteq u \cup B}} (\mathscr{T}(E) \wedge [u \cup B \subseteq \overline{E}]) \geqslant \mathscr{T}(u) \wedge [u \cup B \subseteq \overline{u}] =$

$\mathscr{T}(u)>\lambda+\mathscr{A}(B)-1-\frac{1}{n}$，其中$[u\cup B\leqslant\bar{u}]=1$.

现设 $\tilde{\mathscr{A}}=\int_{B\subseteq A}\max(0,\lambda+\mathscr{A}(B)-1-\frac{1}{n})/u\cup B\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$

则$[k(\tilde{\mathscr{A}},A)]=\inf_{x\in A}\sup\{\tilde{\mathscr{A}}\cup B\mid x\in u\cup B\subseteq X\}=\inf_{x\in A}\sup_{x\in u\cup B}\tilde{\mathscr{A}}(u\cup B)\geqslant\inf_{x\in A}\sup(\lambda+\mathscr{A}(B)-1-\frac{1}{n})=\inf_{x\in A}\sup_{x\in B}\mathscr{A}(B)+\lambda-1-\frac{1}{n}=[k(\mathscr{A},A)]+\lambda-1-\frac{1}{n}$.

$[k_s(\tilde{\mathscr{A}},A)]=[K(\tilde{\mathscr{A}},A)\wedge(\tilde{\mathscr{A}}\subseteq\mathscr{T}_s)]\geqslant\max(0,[k(\tilde{\mathscr{A}},A)])\geqslant\max(0,[k(\mathscr{A},A)]+\lambda-1-\frac{1}{n})\geqslant\max(0,[k(\mathscr{A},A)]+\lambda-1)-\frac{1}{n}$
$=\max(0,[k(\mathscr{A},A)]+[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_s^A]-1)-\frac{1}{n}=[k'_x(\mathscr{A},A)]-\frac{1}{n}$

对任意 $\mathscr{D}\leqslant\tilde{\mathscr{A}}$，设

$$\mathscr{D}'=\int_{B\subseteq A}\mathscr{D}(u\cup B)/B\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(A))$$

则 $\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{A}$，$[FF(\mathscr{D}')]=[FF(\mathscr{D})]$且$[k(\mathscr{D}',A)]=[k(\mathscr{D},A)]$，

故而

$$[(\forall\mathscr{A})(k_s(\mathscr{A},A)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]\otimes[k'_s(\mathscr{A},A)]-\frac{1}{n}$$

$$\leqslant[(\forall\mathscr{A})(k_s(\mathscr{A},A)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]\otimes[k'_s(\mathscr{A},A)]-\frac{1}{n})$$

$$\leqslant[(k_s(\tilde{\mathscr{A}},A)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\tilde{\mathscr{A}})\wedge k(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D})))]\otimes[k_s(\tilde{\mathscr{A}},A)]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\tilde{\mathscr{A}})\wedge k(\mathscr{D},A)\wedge FF(\mathscr{D}))]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{D}')((\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D}',A)\wedge FF(\mathscr{D}'))]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{B},A)\wedge FF(\mathscr{B}))]$$

令 $n\to\infty$，我们得到

$$[(\forall \mathscr{A})(k_s(\mathscr{A},A)\to(\exists \mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},A)\dot{\wedge}FF(\mathscr{D})))]\otimes[k'_s(\mathscr{A},A)]$$

$$\leqslant[(\exists \mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{B},A)\dot{\wedge}FF(\mathscr{B}))]$$

$$[(\forall \mathscr{A})(k_s(\mathscr{A},A)\to(\exists \mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},A)\dot{\wedge}FF(\mathscr{D})))]$$

$$\leqslant[k'_s(\mathscr{A})]\propto[(\exists \mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{B},A)\dot{\wedge}FF(\mathscr{B}))].$$

因此，

$$[(\forall \mathscr{A})(k_s(\mathscr{A},A)\to(\exists \mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},A)\dot{\wedge}FF(\mathscr{D})))]$$
$$\leqslant\inf_{\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))}([k'_s(\mathscr{A},A)]\propto[(\exists \mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{B},A)\dot{\wedge}FF(\mathscr{B}))])$$
$$=[\Gamma_s(A)].\quad\square$$

3.3 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，则

$$\vDash\Gamma_s(X,\mathscr{T})\to\Gamma(X,\mathscr{T})$$

证明 对于任意$\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[k_0(\mathscr{A},X)]=[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[(k(\mathscr{A},X))\dot{\wedge}(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T})]$$

$$\leqslant[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[k(\mathscr{A},X)]\dot{\wedge}(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_s)]=[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[(k_s(\mathscr{A},X))$$

$$\leqslant[(\exists \mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},X)\dot{\wedge}FF(\mathscr{D}))]$$

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\leqslant[k_0(\mathscr{A},X)]\propto[(\exists \mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},X)\dot{\wedge}FF(\mathscr{D}))]$$

因此，

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\leqslant\inf_{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))}([k_0(\mathscr{A},X)]\propto[(\exists \mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},X)\dot{\wedge}FF(\mathscr{D}))])$$
$$=[\Gamma(X,\mathscr{T})].\quad\square$$

3.4 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，$A\subseteq X$，则

$$\vDash\Gamma_s(X,\mathscr{T})\dot{\wedge}(A\in\mathscr{F})\to\Gamma_s(A)$$

证明 对任意 $\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，我们有

$\mathscr{F}(A)\otimes[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_s]=[(A^c\in\mathscr{T})\wedge(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_s)]\leqslant[(\{A^c\}\subseteq\mathscr{T}_s)\wedge(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_s)]$

$$=\inf_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-[B\in\{A^c\}]+\mathscr{T}_s(B))\wedge\inf_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-\mathscr{A}(B)+\mathscr{T}_s(B))$$

$$=\inf_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(1,(1-\mathscr{A}(B)\wedge(1-[B\in\{A^c\}])+\mathscr{T}_s(B))$$

$$=\inf_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-(\mathscr{A}(B)\vee[B\in\{A^c\}])+\mathscr{T}_s(B))$$

$$=\inf_{B\in\mathscr{P}(X)}\min(1,1-(\mathscr{A}\cup\{A^c\})(B)+\mathscr{T}_s(B))$$

$$=[(\mathscr{A}\cup\{A^c\}\subseteq\mathscr{T}_s].$$

$$[k(\mathscr{A},A)]=\inf_{x\in A}\sup_{x\in B}\mathscr{A}(B)\leqslant\inf_{x\in A}\sup_{x\in B}\mathscr{A}(B)\vee\inf_{x\in A^c}A^c(x)$$

$$=\inf_{x\in A}\sup_{x\in B}\mathscr{A}(B)\vee\inf_{x\in A^c}\sup_{x\in B}\{A^c\}(B)$$

$$=\inf_{x\in X}sup\{\mathscr{A}(B)\vee(B\in\{A^c\})\mid x\in B\subseteq X\}$$

$$=\inf_{x\in X}sup\{\mathscr{A}(B)\cup\{A^c\})(B)\mid x\in B\subseteq X\}$$

$$=[k(\mathscr{A}\cup\{A^c\},X)]$$

$$[k(\mathscr{A}\cup\{A^c\},X)]=\inf_{x\in X}\sup_{x\in B}(\mathscr{A}\cup\{A^c\})(B)$$

$$\leqslant\inf_{x\in X\setminus\{A^c\}}\sup_{x\in B}(\mathscr{A}\cup\{A^c\})(B)$$

$$=\inf_{x\in A}sup\{\mathscr{A}(B)\vee(B\in\{A^c\})\mid x\in B\subseteq X\}$$

$$=\inf_{x\in A}sup\{\mathscr{A}(B)\mid x\in B\subseteq X\}$$

$$=[k(\mathscr{A},A)].$$

故而，$[k(\mathscr{A},A)]=[k(\mathscr{A}\cup\{A^c\}.X)]$.

对任意 $\mathscr{D}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，令 $\mathscr{B}=\mathscr{D}\setminus\{A^c\}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$

$$(\mathscr{D}\setminus\{A^c\})(B)=\begin{cases}\mathscr{D}(A), & B\neq A^c\\ 0 & ,B=A^c\end{cases}$$

则 $\mathscr{D}\setminus\{\mathscr{A}^c\}=\mathscr{B}\leqslant\mathscr{D},\mathscr{D}\leqslant\mathscr{B}\cup\{A^c\}$. $[FF(\mathscr{B})]=[FF(\mathscr{D})]$, $[\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}]$

$=[\mathscr{D}\leqslant(\mathscr{A}\cup\{A^c\})],[k(\mathscr{D},X)]=[k((\mathscr{D}\setminus\{A^c\})\cup\{A^c\},X)]=$ $[k(\mathscr{B}\cup\{A^c\},X)]=[k(\mathscr{B},A)]$.

因此，由 3.2 定理，我们有

$$
\begin{aligned}
&[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[A\in\mathscr{F}]\otimes[A\subseteq\mathscr{T}_s]\otimes[k(\mathscr{A},A)]\\
&\leqslant[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[(\mathscr{A}\cup\{A^c\})\subseteq\mathscr{T}_s]\otimes[k(\mathscr{A}\cup\{A^c\},X)]\\
&=[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[k_s(\mathscr{A}\cup\{A^c\},X]\\
&\leqslant[(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant(\mathscr{A}\cup\{A^c\}))\wedge k(\mathscr{D},X)\dot\wedge FF(\mathscr{D}))]\\
&=[(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{B},A)\dot\wedge FF(\mathscr{B}))].
\end{aligned}
$$

因此，

$$
[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[A\in\mathscr{F}]\leqslant\inf_{\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))}([k_s(\mathscr{A},A)]\propto[(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{B},A)\dot\wedge FF(\mathscr{B}))])\leqslant[\Gamma_s(A)].\quad\square
$$

3.5 **推论** 设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，$A\subseteq X$，则
$\models\Gamma_s(X,\mathscr{T})\dot\wedge(A\in\mathscr{T}_s)\to\Gamma_s(A)$.

由 3.3 定理及第六章 2.3 定理(2)，我们可以得到

3.6 **定理** 设$(X,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间，$A\subseteq X$，则

$$
T_2(X,\mathscr{T})\dot\wedge\Gamma_s(A)\overset{us}{\models}T_2(X,\mathscr{T})\to A\in\mathscr{F}
$$

其中 $T_2(X,\mathscr{T})$表示不分明化拓扑中的 Hausdorff 分离性。

3.7 **定义** 设$(X,\mathscr{T})$、$(Y,\mathscr{U})$是两个不分明化拓扑空间，一元不分明谓词 $C_i(f)$、$O_s\in\mathscr{F}(Y^Z)$分别称为不分明不定映射和不分明半开映射，定义为：

$$C_i(f):=(\forall u)(u\in\mathscr{U}_s\to f^{-1}(u)\in\mathscr{T}_s)$$

$$O_s(f):=(\forall u)(u\in\mathscr{T}_s\to f(u)\in\mathscr{U}_s)$$

即，f 是不定映射和 f 是半开映射的真值度分别为

$$[C_i(f)]=\inf_{u\subseteq X}\min(1,1-\mathscr{U}_s(u)+\mathscr{T}_s(f^{-1}(u)))$$

$$[O_i(f)]=\inf_{u\subseteq X}\min(1,1-\mathscr{T}_s(u)+\mathscr{U}_s(f(u)))$$

3.8 **定理** 对于任意不分明化拓扑空间$(X,\mathscr{T})$和$(Y,\mathscr{U})$及

$f\in Y^X$、$M\subseteq X$,

$\vDash \Gamma_s(X,\mathscr{T})\wedge C_i(f)\wedge(M\in\mathscr{T}_s)\to\Gamma_s(f(X\setminus M))$

证明 对于任意 $\mathscr{B}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$,我们令

$$\mathscr{A}=f^{-1}(\mathscr{B})=\int_{A\subseteq X}\mathscr{B}(f(A))/A\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X)).$$

则,$[k(\mathscr{A},X\setminus M)]=\inf\limits_{X\in X\setminus M}\sup\limits_{x\in A}\mathscr{A}(A)=\inf\limits_{x\in X\setminus M}\sup\limits_{x\in A}\mathscr{B}(f(A))$

$=\inf\limits_{x\in X\setminus M}\sup\limits_{f(x)\in B}\mathscr{B}(B)=\inf\limits_{y\in f(X\setminus M)}\sup\limits_{y\in B}\mathscr{B}(B)=[k(\mathscr{B},f(X\setminus M))]$.

$[\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}_s]\otimes[C_i(f)]=\inf\limits_{B\subseteq Y}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{U}_s(B))\otimes\inf\limits_{B\subseteq Y}\min(1,1-\mathscr{U}_s(B)+\mathscr{T}_s(f^{-1}(B)))$

$=\inf\limits_{B\subseteq Y}\max(1,1-\mathscr{U}_s(B)+\mathscr{T}_s(f^{-1}(B))$、$1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{U}_s(B)$、$1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}_s(f^{-1}(B))).0)$

$\leqslant\inf\limits_{B\subseteq Y}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}_s(f^{-1}(B)))$

$=\inf\limits_{A\subseteq X}\inf\limits_{f^{-1}(B)=A}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}_s(f^{-1}(B)))$

$=\inf\limits_{A\subseteq X}\inf\limits_{f^{-1}(B)=A}\min(1,1-\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}_s(A))=\inf\limits_{A\subseteq X}\min(1,1-\sup\limits_{f^{-1}(B)=A}\mathscr{B}(B)+\mathscr{T}_s(A))$

$=\inf\limits_{A\subseteq X}\min(1,1-\mathscr{A}(A)+\mathscr{T}_s(A))=[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_s]$

$[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_s]\otimes[M\in\mathscr{T}_s]\leqslant[\mathscr{A}\cup\{M\}\subseteq\mathscr{T}_s]$

对任意 $\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{A}$,令 $\bar{\mathscr{D}}=f(\mathscr{D}')=\int_{B\subseteq X}\mathscr{D}'(B)/f(B)^{\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(Y))}$

则 $[FF(\mathscr{D}')]\leqslant[FF(\bar{\mathscr{D}})]$. $\bar{\mathscr{D}}=f(\mathscr{D}')\leqslant f(\mathscr{A})=ff^{-1}(\mathscr{B})\leqslant\mathscr{B}$.

且 $[k(\bar{\mathscr{D}},f(X\setminus M))]=\inf\limits_{y\in f(X\setminus M)}\sup\limits_{y\in B}\bar{\mathscr{D}}(B)=\inf\limits_{y\in f(X\setminus M)}sup\{\mathscr{D}(A)$

$|y\in B=f(A)\}\geqslant\inf\limits_{y\in f(X\setminus M)}\sup\limits_{f^{-1}(y)\in A}\mathscr{D}'(A)=\inf\limits_{x\in X\setminus M}\sup\limits_{x\in A}\mathscr{D}'(A)$

$=[k(\mathscr{D}',X\setminus M)]$

因而,

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[C_i(f)]\otimes[M\in\mathscr{T}_s]\otimes[k'_s(\mathscr{B},f(X\setminus M)]$$

$$=[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[C_i(f)]\otimes[M\in\mathscr{T}_s]\otimes[k(\mathscr{B},f(X\setminus M))]\otimes[\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}_s]$$

$$\leqslant[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[k(\mathscr{A},X\setminus M)]\otimes[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_s]\otimes[M\in\mathscr{T}_s]$$

$$\leqslant[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[k(\mathscr{A},X\setminus M)]\otimes[(\mathscr{A}\cup\{M\})\subseteq\mathscr{T}_s]$$

$$\leqslant[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[k_s((\mathscr{A}\cup\{M\}),X)]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant(\mathscr{A}\cup\{M\}))\land k(\mathscr{D},X)\dot\land FF(\mathscr{D}))]$$

$$\leqslant[(\exists\mathscr{D}')((\mathscr{D}'\leqslant\mathscr{A})\land k(\mathscr{D}',X\setminus M)\dot\land FF(\mathscr{D}'))]$$

$$\leqslant[(\exists\bar{\mathscr{D}})((\bar{\mathscr{D}}\leqslant\mathscr{B})\land k(\bar{\mathscr{D}},f(X\setminus M)\dot\land FF(\bar{\mathscr{D}}))]$$

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[C_i(f)]\otimes[M\in\mathscr{T}_s]$$

$$\leqslant[k'_s(\mathscr{B},f(X\setminus M))]\propto[(\exists\bar{\mathscr{D}})((\bar{\mathscr{D}}\leqslant\mathscr{B})\land k(\bar{\mathscr{D}},f(X\setminus M))\dot\land FF(\bar{\mathscr{D}}))],$$

其中 k'_s 是关于 $\mathscr{U}$ 的，因而 3.2 定理得到

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[C_i(f)]\otimes[M\in\mathscr{T}_s]\leqslant\inf_{\mathscr{A}\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))}([k'_s(\mathscr{B},f(X\setminus M))])\propto[(\exists\bar{\mathscr{D}})((\bar{\mathscr{D}}\leqslant\mathscr{B})\land k(\bar{\mathscr{D}}、f(X\setminus M))\dot\land FF(\bar{\mathscr{D}}))]\leqslant[\Gamma_s(f(X\setminus M)]$$ □

在上述定理中，若设 $M=\varnothing$，则因 $\vDash\varnothing\in\mathscr{T}_s$，故而可以得到

3.9 **推论** 对于任意不分明化拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 和 $(Y,\mathscr{U})$ 及 $f\in Y^Z$，则

$$\vDash\Gamma_s(X,\mathscr{T})\dot\land C_i(f)\to\Gamma_s(f(X))$$

3.10 **定理** 设 $(X,\mathscr{T})$ 和 $(Y,\mathscr{U})$ 是两个不分明化拓扑空间，$f\in Y^X$ 是即单又满的映射，则

$$\vDash\Gamma_s(X,\mathscr{T})\dot\land T_2(Y,\mathscr{U})\dot\land C_i(f)\to O_s(f)$$

证明 对于任意 $A\subseteq X$，由 3.8 定理得到

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[C_i(f)]\otimes[A\in\mathscr{T}_s]\leqslant[\Gamma_s(f(X\setminus A))]$$

由 3.6 定理，我们可以得到

$$T_2(Y,\mathscr{U})\dot\land\Gamma_s(f(X\setminus A))\overset{us}{\vDash}T_2(Y,\mathscr{U})\to f(X\setminus A)\in\mathscr{F}_Y$$

由此可推出

$$\models T_2(Y,\mathscr{U})\wedge\Gamma_s(f(X\setminus A))\to f(X\setminus A)\in\mathscr{F}_Y$$

故而，

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[C_i(f)]\otimes[T_2(Y,\mathscr{U})]\otimes[A\in\mathscr{T}_s]$$
$$\leqslant[T_2(Y,\mathscr{U})]\otimes[\Gamma_s(f(X\setminus A))]$$
$$\leqslant[f(X\setminus A)\in\mathscr{F}_y]$$
$$=[Y\setminus f(A)\in\mathscr{F}_Y]$$
$$=[f(A)\in\mathscr{U}]$$
$$\leqslant[f(A)\in\mathscr{U}_s]$$

因此，

$$[\Gamma_s(X,\mathscr{T})]\otimes[T_2(Y,\mathscr{U})]\otimes[C_i(f)]$$
$$\leqslant\inf_{A\subseteq X}(\mathscr{T}_s(A)\propto\mathscr{U}_s(f(A)))$$
$$=[O_s(f)].\quad\square$$

3.11 **定义** 设 Σ 是一类不分明化拓扑空间，一元不分明谓词 $\Gamma_\theta\in\mathscr{F}(\Sigma)$ 称为是不分明 θ 一紧的，定义为

$\Gamma_\theta(X,\mathscr{T}):=(\forall\mathscr{A})(k_\theta(\mathscr{A},X)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge k(\mathscr{D},X)\wedge FF(\mathscr{D})))$

其中 $k_\theta(\mathscr{A},X):=K(\mathscr{A},X)\wedge(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_\theta)$

3.12 **定理** 设 $(X,\mathscr{T})$ 是不分明化拓扑空间，则

$$\models\Gamma(X,\mathscr{T})\to\Gamma_\theta(X,\mathscr{T})$$

证明 因为对任意的 $A\subseteq X$，$\models A\in\mathscr{T}_\theta\to A\in\mathscr{T}$，从而对任意的 $\mathscr{A}$，$[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_\theta]\leqslant[\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}]$，$[k_\theta(\mathscr{A},X)]\leqslant[k_0(\mathscr{A},X)]$ 及 $[\Gamma(X,\mathscr{T})]\leqslant[\Gamma_\theta(X,\mathscr{T})]$

3.13 **定理** 设 $(X,\mathscr{T})$ 是不分明化拓扑空间，令

$\gamma_1:=(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F}_\theta)\wedge fI(\mathscr{A})\to(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A})\to(x\in A)))$

$\gamma_2:=(\forall\mathscr{A})(\exists B)((((\mathscr{A}\subseteq\mathscr{F}_\theta)\wedge(B\in\mathscr{T}_\theta))\wedge(\forall\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge FF$

$(\mathscr{D})\to\neg(\bigcap\mathscr{D}\subseteq B))\to\neg(\bigcap\mathscr{A}\subseteq B))$.

其中$\bigcap\mathscr{D}\in\mathscr{F}(X)$, $x\in\bigcap\mathscr{D}:=(\forall A)(A\in\mathscr{D}\to x\in A)$

则　$\Gamma_\theta(X,\mathscr{T})\leftrightarrow\gamma_i$, $i=1,2$.

证明　注意到$\mathscr{T}_\theta$是X上的一个不分明化拓扑,因而由第六章有关定理我们即可得到本定理的证明,但在此我们仍在原来的空间$(X,\mathscr{T})$中讨论本定理.

(a) 我们首先证明$[\Gamma_\theta(X,\mathscr{T})]=[\gamma_1]$

对任意的$\mathscr{A}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$,设

$$\mathscr{A}^c=\int_{A\in\mathscr{F}(X)}\mathscr{A}(A)/A^c$$

则

$$\models(\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_\theta)\leftrightarrow(\mathscr{A}^c\subseteq\mathscr{F}_\theta)$$

$$\models FF(\mathscr{A})\leftrightarrow FF(\mathscr{A}^c)$$

$$\models(\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}^c)\leftrightarrow(\mathscr{B}^c\leqslant\mathscr{A})$$

$$\models k(\mathscr{A},X)\leftrightarrow\neg(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A}^c)\to(x\in A)$$

$$\begin{aligned}\models\neg fI(\mathscr{A}^c)&\leftrightarrow(\exists\mathscr{B})((\mathscr{B}\leqslant\mathscr{A}^c)\wedge FF(\mathscr{B})\wedge\neg(\exists x)(\forall B)((B\\&\in\mathscr{B})\to(x\in B)))\\&\leftrightarrow(\exists(\mathscr{B})((\mathscr{B}^c\leqslant\mathscr{A})\wedge FF(\mathscr{B}^c)\wedge k(\mathscr{B}^c,X)\\&\leftrightarrow(\exists(\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A})\wedge FF(\mathscr{D})\wedge k(\mathscr{D},X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\models\gamma_1&\leftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}^c\subseteq\mathscr{F}_\theta)\wedge fI(\mathscr{A}^c)\to(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A}^c)\\&\to(x\in A)))\\&\leftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}^c\subseteq\mathscr{F}_\theta)\to(fI(\mathscr{A}^c)\to(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A}^c)\\&\to(x\in A)))\\&\leftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}^c\subseteq\mathscr{F}_\theta)\to(\neg(\exists x)(\forall A)((A\in\mathscr{A}^c)\to(x\\&\in A)))\leftrightarrow\neg fI(\mathscr{A}^c)))\\&\leftrightarrow(\forall\mathscr{A})((\mathscr{A}\subseteq\mathscr{T}_\theta)\to(k(\mathscr{A},X)\to(\exists\mathscr{D})((\mathscr{D}\leqslant\mathscr{A}\wedge k(\mathscr{D},\\&X)\wedge FF(\mathscr{D}))))\end{aligned}$$

$\leftrightarrow (\forall \mathscr{A})((\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}_\theta) \wedge k(\mathscr{A}, X) \to (\exists \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}) \wedge k(\mathscr{D}, X) \wedge FF(\mathscr{D}))))$

$\leftrightarrow \Gamma_\theta(X, \mathscr{T})$.

(b)设 $B^c \in \mathscr{P}(X)$ 且对任意的 $\mathscr{A} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，则

$$
\begin{aligned}
&[(\mathscr{A} \cup \{B^c\}) \subseteq \mathscr{F}_\theta] \\
&= \inf_{A \in \mathscr{P}(X)} \min(1, 1 - (\mathscr{A} \cup \{B^c\})(A) + \mathscr{F}_\theta(A)) \\
&= \inf_{A \in \mathscr{P}(X)} \min(1, 1 - (\mathscr{A}(A) \vee [A \in \{B^c\})] + \mathscr{F}_\theta(A)) \\
&= \inf_{A \in \mathscr{P}(X)} \min(1, (1 - \mathscr{A}(A)) \wedge [A \in \{B^c\}]) + \mathscr{F}_\theta(A)) \\
&= \inf_{A \in \mathscr{P}(X)} \min(1, 1 - \mathscr{A}(A) + \mathscr{F}_\theta(A)) \wedge \inf_{A \in \mathscr{P}(X)} \min(1, 1 - [A \in \{B^c\}] + \mathscr{F}_\theta(A)) \\
&= [(\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_\theta) \wedge (\{B^c\} \subseteq \mathscr{F}_\theta)] \\
&= [(\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_\theta) \wedge (B^c \in \mathscr{F}_\theta)] \\
&= [(\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_\theta) \wedge (B \in \mathscr{T}_\theta)]
\end{aligned}
$$

对任意 $\mathscr{B} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$，设 $\mathscr{D} = \mathscr{B} \setminus \{B^c\} \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$.

$$
(\mathscr{B} \setminus \{B^c\})(A) = \begin{cases} \mathscr{B}(A), & A \neq B^c \\ 0, & A = B^c \end{cases}
$$

则 $\mathscr{B} \setminus \{B^c\} = \mathscr{D} \leqslant \mathscr{B}, \mathscr{D} \cup \{B^c\} \geqslant \mathscr{B}$.

$$[FF(\mathscr{D})] = [FF(\mathscr{B})], [\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}] = [\mathscr{B} \leqslant (\mathscr{A} \cup \{B^c\})]$$

且 $[(\forall \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}) \wedge FF(\mathscr{D}) \to (\exists x)(\forall A)(A \in \mathscr{D} \cup \{B^c\}) \to (x \in A)))]$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}} \min(1, 1 - [FF(\mathscr{D})] + \sup_x \inf_A ((\mathscr{D} \cup \{B^c\})(A) \propto A(x))) \\
&\leqslant \inf_{\mathscr{B} \leqslant \mathscr{A} \cup \{B^c\}} \min(1, 1 - [FF(\mathscr{B})] + \sup_x \inf_A (\mathscr{B}(A) \propto A(x))) \\
&= [fI(\mathscr{A} \cup \{B^c\})].
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$[\gamma_1] \otimes [((\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_\theta) \wedge (B \in \mathscr{T}_\theta)) \wedge (\forall \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}) \wedge FF(\mathscr{D}) \to \neg$

$(\bigcap \mathscr{D} \subseteq B))]$

$= [\gamma_1] \otimes [((\mathscr{A} \cup \{B^c\}) \subseteq \mathscr{F}_\theta) \mathbin{\text{A}}$

$(\forall \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}) \wedge FF(\mathscr{D}) \to (\exists x)(\forall A)(A \in \mathscr{D} \cup \{B^c\}) \to (x \in$

$A)))]$

$= [\gamma_1] \otimes [((\mathscr{A} \cup \{\mathscr{B}^c\}) \subseteq \mathscr{F}_\theta) \mathbin{\text{A}} fI(\mathscr{A} \cup \{B^c\})]$

$\leqslant [(\exists x)(\forall A)(A \in (\mathscr{A} \cup \{B^c\}) \to (x \in A))]$

$= [\neg (\bigcap \mathscr{A} \subseteq B)].$

故而，

$$[\gamma_1] \leqslant \inf_{\mathscr{A}} \sup_{B} (((\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_\theta) \wedge (B \in \mathscr{T}_\theta)) \mathbin{\text{A}} (\forall \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}) \wedge FF$$

$(\mathscr{D}) \to \neg (\bigcap \mathscr{D} \subseteq B)) \to \neg (\bigcap \mathscr{A} \subseteq B)) = [\gamma_2].$

反之，

$$[\gamma_2] \otimes [(\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_\theta) \mathbin{\text{A}} fI(\mathscr{A})]$$

$= [\gamma_2] \otimes [((\mathscr{A} \setminus \{B\}) \cup \{B\}) \subseteq \mathscr{F}_\theta) \mathbin{\text{A}} fI((\mathscr{A} \setminus \{B\}) \cup \{B\})]$

$= [\gamma_2] \otimes [((\mathscr{A}' \cup \{B\}) \subseteq \mathscr{F}_\theta) \mathbin{\text{A}} fI((\mathscr{A}' \cup \{B\})]$

$= [\gamma_2] \otimes [((\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{F}_\theta) \wedge (B^c \in \mathscr{T}_\theta) \mathbin{\text{A}} ((\forall \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}') \wedge FF(\mathscr{D}) \to$

$(\exists x)(\forall A)(A \in (\mathscr{D} \cup \{B\}) \to (x \in A)))]$

$= [\gamma_2] \otimes [((\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{F}_\theta) \wedge (B^c \in \mathscr{T}_\theta)) \mathbin{\text{A}} ((\forall \mathscr{D})((\mathscr{D} \leqslant \mathscr{A}') \wedge FF(\mathscr{D})$

$\to \neg (\bigcap \mathscr{D} \subseteq B^c))] \leqslant [\neg (\bigcap \mathscr{A}' \subseteq B^c)]$

$= [(\exists x)(\forall A)((A \in \mathscr{A}' \cup \{B\})) \to (x \in A))]$

$= [(\exists x)(\forall A)((A \in \mathscr{A}) \to (x \in A))]$

故而

$$[\gamma_2] \leqslant \inf_{\mathscr{A}} ((\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_\theta) \mathbin{\text{A}} fI(\mathscr{A}) \to (\exists x)(\forall A)((A \in \mathscr{A}) \to (x \in$$

$A))) = [\gamma_1]$

3.14 **定理** 对任意不分明化拓扑空间$(X, \mathscr{T})$和$(Y, \mathscr{U})$及$f \in Y^X$是满射，

则 $\vdash \Gamma_\theta(X, \mathscr{T}) \mathbin{\text{A}} C_\theta(f) \to \Gamma_\theta(Y, \mathscr{U})$

证明 类似于3.8定理证明，留给读者。 □

第八章　不分明化一致空间

§1　不分明化一致空间

1.1　**定义**　设 X 是一个集合，$\mathcal{U}\in\mathscr{F}^N(\mathscr{P}(X\times X))$ 称为 X 上的一致结构，若对任意 $u, v\subseteq X\times X$，

$(u1)\models(u\in\mathcal{U})\to(\Delta\subseteq u)$

$(u2)\models(u\in\mathcal{U})\to(u^{-1}\in\mathcal{U})$

$(u3)\models(u\in\mathcal{U}\to(\exists v)((v\in\mathcal{U})\wedge(v\circ v\subseteq\mathcal{U})$

$(u4)\models(u\in\mathcal{U})\wedge(v\in\mathcal{U})\to(u\cap v\in\mathcal{U})$.

$(u5)\models(u\in\mathcal{U})\wedge(u\subseteq v)\to(v\in\mathcal{U})$

又称 $(X,\mathcal{U})$ 为一个不分明化一致空间．

1.2　**定义**　设 $(X,\mathcal{U})$ 是一不分明化一致空间，$\mathscr{B}$, $\varphi\in\mathscr{F}^N(\mathscr{P}(X\times X))$，且 $\mathscr{B}$、$\varphi\subseteq\mathcal{U}$. 若对任意 $u\subseteq X\times X$，

$\models(u\in\mathcal{U})\to(\exists v)((v\in\mathscr{B})\wedge(v\subseteq u))$

则称 $\mathscr{B}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个基，若 $\varphi^{(\cap)}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个基，则称 φ 是 $\mathcal{U}$ 的一个子基．

1.3　**定理**　设 $\mathscr{B}\in\mathscr{F}^N(\mathscr{P}(X\times X))$. 则 $\mathscr{B}$ 是 X 上的某个不分明化一致结构的基当且仅当对任意 $u, v\subseteq X\times X$，

$(B1)\models(u\in\mathscr{B})\to(\Delta\subseteq u)$，

$(B2)\models(u\in\mathscr{B})\to(\exists v)((v\in\mathscr{B})\wedge(v\subseteq u^{-1}))$，

$(B3)\models(u\in\mathscr{B})\to(\exists v)((v\in\mathscr{B})\wedge(v\circ v\subseteq u))$，

$(B4)\models(u\in\mathscr{B})\wedge(v\in\mathscr{B})\to(\exists w)((w\in\mathscr{B})\wedge(w\subseteq u\cup v))$.

证明　对于满足条件 $(B1)$—$(B4)$ 的 $\mathscr{B}$，令

$$\mathscr{U}=\int_{u\subseteq X\times X}\sup_{v\subseteq u}\mathscr{B}(V)/u$$

则 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一个不分明化一致结构，其逆是直接的．□

1.4 **定理** (1)若对任意 $u\subseteq X\times X$，$\varphi\in\mathscr{F}^N(\mathscr{P}(X\times X))$ 满足如下条件：

$(S1)\models(u\in\varphi)\rightarrow(\Delta\subseteq u)$，

$(S2)\models(u\in\varphi)\rightarrow(\exists v)((v\in\varphi)\wedge(v\subseteq u^{-1}))$，

$(S3)\models(u\in\varphi)\rightarrow(\exists v)((v\in\varphi)\wedge(v\circ v\subseteq u))$.

则 φ 是 X 上的某个不分明化一致结构的子基．

(2)若对任意 $i\in I$，$\mathscr{U}_i$ 是 X 上的一个不分明化一致结构，则 $\bigcup_{i\in I}\mathscr{U}_i$ 是 X 上的某个不分明化一致结构的子基．

证明 (1)我们验证 $\varphi^{(\cap)}$ 满足 $(B1)$—$(B4)$．$(B1)$ 和 $(B4)$ 都是明显的，而 $(B3)$ 的证明类似于 $(B2)$，因此我们仅就 $(B2)$ 加以证明．

$$\begin{aligned}\varphi^{(\cap)}(u)&=\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(u_i)\mid\bigcap_{i=1}^{n}u_i=u,n\in N\}\\&\leqslant\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\sup_{v_i\subseteq u_i^{-1}}\varphi(v_i)\mid\bigcap_{i=1}^{n}u_i=u,n\in N\}\\&=\sup\{\sup_{f\in\Pi_{i=1}^{n}M_i}\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(f(i))\mid\bigcap_{i=1}^{n}u_i=u,n\in N\}\end{aligned}$$

其中 $M_i=\{v_i\mid v_i\subseteq u_i^{-1}\}(i=1,\cdots,n)$．若 $f\in\Pi_{i=1}^{n}M_i$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}f(i)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}u_i^{-1}=(\bigcap_{i=1}^{n}u_i)^{-1}=u^{-1}.$$

因此，

$$\varphi^{(\cap)}(u)\leqslant\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(V_i)\mid\bigcap_{i=1}^{n}v_i\subseteq u^{-1}\subseteq u^{-1},n\in N\}=\sup_{v\subseteq u^{-1}}\varphi^{(\cap)}(v).$$

(2)是明显的．□

例 1 设 p 是 X 上的所有伪度量的集合，若 $\mathscr{A}\in\mathscr{F}^N(p)$，则

$$\varphi_A = \int_{p\in P, r>0} \mathscr{A}(p)/v_{p,r}$$

是 X 上的某个不分明化一致结构的子基，该一致结构称为是由 $\mathscr{A}$ 所产生的．其中 $v_{p,r}=\{(x,y)\in X\times X \mid p(x,y)<r\}(p\in P, r>0)$.

§2 不分明化一致拓扑

2.1 **引理** 设$(X,\mathscr{U})$是一个不分明化一致空间，$\mathscr{T}\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(X))$定义为

$$T\in\mathscr{T}:=(\forall x)((x\in T)\rightarrow(\exists u)((u\in\mathscr{U})\wedge(u[x]\subseteq T))),$$

$T\subseteq X$，即，$\mathscr{T}(T)=\inf\limits_{x\in T}\sup\limits_{u[x]\subseteq T}\mathscr{U}(u)$，$T\subseteq X$.

则$\mathscr{T}$是 X 上的一个不分明化拓扑，称为 $\mathscr{U}$ 的不分明化(一致)拓扑.

其中若 $A\subseteq X$，则 $u[A]=\{y \mid$ 对 A 中的某个x 有$(x,y)\in u\}$，而 $x\in X$ 时$u[x]=u[\{x\}]$.

证明 首先明显的有 $\mathscr{T}(X)=1$. 其次对任意 T_1、$T_2\subseteq X$，由$(u4)$得到：

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}(T_1)\wedge\mathscr{T}(T_2) &= \inf_{x_1\in T_1}\sup_{u_1[x_1]\subseteq T_1}\mathscr{U}(u_1)\wedge\inf_{x_2\in T_2}\sup_{u_2[x_2]\subseteq T_2}\mathscr{U}(u_2)\\
&\leqslant \inf_{x\in T_1\cap T_2}\Big(\sup_{u_1(x)\subseteq T_1}\mathscr{U}(u_1)\wedge\sup_{u_2[x]\subseteq T_2}\mathscr{U}(u_2)\Big)\\
&= \inf_{x\in T_1\cap T_2}\sup\{\mathscr{U}(u_1)\wedge\mathscr{U}(u_2) \mid u_1[x]\subseteq T_1, u_2[x]\subseteq T_1\}\\
&\leqslant \inf_{x\in T_1\cap T_2}\sup\{\mathscr{U}(u_1\cap u_2) \mid u_1[x]\subseteq T_1, u_2[x]\subseteq T_2\}\\
&\leqslant \inf_{x\in T_1\cap T_2}\sup_{u[x]\subseteq T_1\cap T_2}\mathscr{U}(u)=\mathscr{T}(T_1\cap T_2).
\end{aligned}$$

最后，对任意 $T_i\subseteq X(i\in I)$，有

$$\mathcal{T}(\bigcup_{i\in I}T_i)=\inf_{x\in\bigcup_{i\in I}T_i}\sup_{u[x]\subseteq\bigcup_{i\in I}T_i}\mathcal{U}(u)$$
$$=\inf_{i\in I}(\inf_{x\in T_i}\sup_{u[x]\subseteq\bigcup_{i\in I}T_i}\mathcal{U}(u))$$
$$\geqslant\inf_{i\in I}(\inf_{x\in T_i}\sup_{u(x)\subseteq T_i}\mathcal{U}(u))$$
$$=\inf_{i\in I}\mathcal{T}(T_i).\quad\square$$

2.2 **定理** 设$(X,\mathcal{U})$是一个不分明化一致空间，$\mathcal{T}$是$\mathcal{U}$的不分明化拓扑。则对任意$x\in X,A\subseteq X$，有

$\models(x\in A^{\circ})\leftrightarrow(\exists u)((u\in\mathcal{U})\wedge(u[x]\subseteq A))$.

证明 （Ⅰ）我们有

$$A^{\circ}(x)=\sup_{x\in B\subseteq A}\inf_{y\in B}\sup_{u[y]\subseteq B}\mathcal{U}(u)$$

若$x\in B\subseteq A$，则

$$\inf_{y\in B}\sup_{u[y]\subseteq B}\mathcal{U}(u)\leqslant\sup_{u[x]\subseteq B}\mathcal{U}(u)\leqslant\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)$$

因此，$A^{\circ}(x)\leqslant\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)$.

（Ⅱ）对任意$t\in[0,1)$，令

$$B=\{x\in X|\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)>t\}.$$

（Ⅱ.1）$B\subseteq A$，事实上，若$x\in B$，则$\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)>0$，且存在$u\subseteq X\times X$使得$u[x]\subseteq A$且$\mathcal{U}(u)>0$，据$(u1)$我们有$\Delta\subseteq u$，$x\in u[x]$且进而有$x\in A$.

（Ⅱ.2）$\mathcal{T}(B)\geqslant t$. 事实上，对任意$x\in B$，存在$u\subseteq X\times X$使得$u[x]\subseteq A$且$\mathcal{U}(u)>t$. 由$(U3)$我们得到$\sup_{v\circ v\subseteq u}\mathcal{U}(v)>t$. 因此，存在$v\subseteq X\times X$使得$v\circ v\subseteq u$且$\mathcal{U}(v)>t$.

（Ⅱ.2.1）$v[x]\subseteq B$. 若$y\in v[x]$，则$v[y]\subseteq(v\circ v)[x]\subseteq u[x]\subseteq A$，$\sup_{w[y]\subseteq A}\mathcal{U}(w)\geqslant\mathcal{U}(v)>t$且$y\in B$.

（Ⅱ.2.2）由（Ⅱ.2.1）可知对任意$x\in B$，

$$\sup_{w[x]\subseteq B}\mathcal{U}(w)\geqslant\mathcal{U}(v)>t\text{ 且 }\mathcal{T}(B)=\inf_{x\in B}\sup_{w[x]\subseteq B}\mathcal{U}(w)\geqslant t.$$

（Ⅱ.3）据（Ⅱ.1）和第二章4.2定理(2)得到

$t\leqslant\mathcal{T}(B)\leqslant[B\subseteq A^{\circ}]=\inf_{x\in B}A^{\circ}(x)$

(Ⅱ.4)对任意 $t\in[0,1)$，若 $\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)>t$，则 $x\in B$ 且 $t\leqslant A^{\circ}(x)$，因 t 是任意的，故而 $\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)\leqslant A^{\circ}(x)$. □

2.3 **定理** 设 $(X,\mathcal{U})$ 是不分明化一致空间，$\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{U}$ 的不分明化拓扑，且 $x\in X$，则

(1) $N_x=\int_{u\subseteq X\times X}\mathcal{U}(u)/u[x]$.

(2)若 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个基(子基)，则 $\mathcal{B}_x=\int_{u\subseteq X\times X}\mathcal{B}(u)/u[x]$ 是 N_x 的一个基(子基).

证明 (1)对任意 $A\subseteq X$，$\sup_{u[x]=A}\mathcal{U}(u)\leqslant\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)$，反之，若 $u[x]\subseteq A$，则令 $v(u)=u\cup(\{x\}\times A)$ 且有 $v(u)[x]=A$ 及从 $(u5)$ 得 $\mathcal{U}(u)\leqslant\mathcal{U}(v(u))$. 因此，

$$\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)\leqslant\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(v(u))\leqslant\sup_{u[x]=A}\mathcal{U}(u).$$

进而依据 2.2 定理可得

$$N_x(A)=A^{\circ}(x)=\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)=\sup_{u[x]=A}\mathcal{U}(u).$$

(2.1)假设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个基.

(2.1.1) $\mathcal{B}_x\subseteq N_x$，对任意 $A\subseteq X$，由 2.2 定理有

$$\mathcal{B}_x(A)=\sup_{u[x]=A}\mathcal{B}(u)\leqslant\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{B}(u)\leqslant\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{U}(u)=N_x(A).$$

(2.1.2)对任意 $A\subseteq X$，由 1.2 定义，

$$\sup_{B\subseteq A}\mathcal{B}_x(B)=\sup_{u[x]\subseteq A}\mathcal{B}(u)=\sup_{u[x]\subseteq A}\sup_{v\subseteq u}\mathcal{B}(v)\geqslant\sup_{u[x]\leqslant A}\mathcal{U}(u)=N_x(A).$$

(2.2)假设 φ 是 $\mathcal{U}$ 的一个子基且 $\mathcal{B}=\varphi^{(\cap)}$，对任意 $A\subseteq X$，

$$\begin{aligned}(\varphi_x)^{(\cap)}(A)&=\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\sup_{u[x]=A_i}\varphi(u)\mid\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A,n\in N\}\\&=\sup\{\sup_{f\in\Pi_{i=1}^{n}M_i}\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(f(i))\mid\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A,n\in N\}\\&=\sup_{u[x]=A}\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(u_i)\mid\bigcap_{i=1}^{n}u_i=u,n\in N\}\end{aligned}$$

$$=\mathscr{B}_x(A).$$

其中 $M_i=\{u\subseteq X\times X\mid u[x]=A_i\}$ $(i=1,\cdots,n)$，由(2.1)可知 $\mathscr{B}_x$ 是 N_x 的基而 φ_x 是 N_x 的子基． □

2.4 **引理** 设 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 和 $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 是两个不分明化拓扑空间且 $x_1\in X$，$x_2\in X_2$，则对任意 $A_1\subseteq X_1$，$A_2\subseteq X_2$，有 $N'_{x_1}(A_1)\wedge N^2_{x_2}(A_2)\leqslant N_{(x_1,x_2)}(A_1\times A_2)$.

证明是直接的．

2.5 **定理** 设 $(X,\mathscr{U})$ 是不分明化一致空间，$\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{U}$ 的不分明化拓扑，则对任意 $u,v\subseteq X\times X$，

$$\vdash(u\in\mathscr{U})\to((u^\circ\subseteq v)\to(v\in\mathscr{U})).$$

其中 u° 是 u 关于 $\mathscr{T}\times\mathscr{T}$ 的内部．

证明 (a)根据1.1定义中的条件(u1)—(u3)，有

$$\mathscr{U}(u)\leqslant\sup_{W_1\cdot W_1\subseteq u}\mathscr{U}(W_1)\leqslant\sup_{W_1\cdot W_1\subseteq u}\ \sup_{W_2\circ W_2\cdot W_2\subseteq W_1}\mathscr{U}(W_2)$$

$$=\sup_{W_2\cdot W_2\cdot W_2\cdot W_2\subseteq u}\mathscr{U}(W_2)\leqslant\sup_{W_2\cdot W_2\subseteq W_1}\mathscr{U}(W_2)$$

$$=\sup_{W_2\cdot W_2\cdot W_2\subseteq u}\mathscr{U}(W_2\cap W_2^{-1})$$

$$\leqslant\sup\{\mathscr{U}(W_2\cap W_2^{-1})\mid(W_2\cap W_2^{-1})\circ(W_2\cap W_2^{-1})\circ(W_2\cap W_2^{-1})\subseteq u\}$$

$$=\sup\{\mathscr{U}(W)\mid W\circ W\circ W\subseteq u\text{ 且 }W\text{ 是对称的}\}.$$

(b)若 $W[x]\times W[y]\subseteq u$，根据2.3定理(1)和2.4引理，

$$u^\circ(x,y)=N_{(x,y)}(u)\geqslant N_{(x,y)}(W[x]\times W[y])\geqslant N_x(W[x])\wedge N_y(W[y])\geqslant\mathscr{U}(W).$$

因此，$\sup\{\mathscr{U}(W)\mid W[x]\times W[y]\subseteq u\}\leqslant u^\circ(x,y)$.

(c)假设 $\lambda=[u^\circ\subseteq v]$，因为

$$[u^\circ\subseteq v]=\inf_{x\in X}\min(1,1-u^\circ(x)+v(x))=\inf_{x\notin v}(1-u^\circ(x))$$

故而对任意 $x\notin v$，$u^\circ(x)\leqslant1-\lambda$.

(d)现在我们往证 $\mathscr{U}(u)+\lambda-1\leqslant\mathscr{U}(v)$，这只需证明对于 $\mathscr{U}$

$(u)>t$ 的任意 $t\in[0,1)$, $t+\lambda-1\leqslant\mathscr{U}(v)$.

若 $t\leqslant 1-\lambda$, 这是显然的. 假设 $t>1-\lambda$, 则由(a), 存在 $W\subseteq X\times X$ 使得 $\mathscr{U}(W)>t$, $W\circ W\circ W\subseteq u$ 且 w 是对称的. 若 $(x,y)\in W$, 则由事实"若 v 为对称的, 则 $v\circ u\circ v=\bigcup\{v[x]\times v[y]:(x,y)\in u\}$"(见 J. L. Kelley, General Topology, lemma 6.1)和(b), 知 $W[x]\times W[y]\subseteq W\circ W\circ W\circ\subseteq u$ 且 $u^{\circ}(x,y)\geqslant\mathscr{U}(W)>t>1-\lambda$. 又由(c)知 $(x,y)\in v$. 因此, $W\subseteq v$ 且 $t+\lambda-1\leqslant t<\mathscr{U}(v)$.
□

2.6 引理 设 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 和 $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 是两个不分化拓扑空间, 且 $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$. 设 $\mathscr{B}_{x_i}$ 是 N_{x_i} 的基 $(i=1,2)$, 则

$$\mathscr{B}_{(x_1,x_2)}=\int_{A_1\subseteq X_1,A_2\subset X_2}\mathscr{B}_{x_1}(A_1)\wedge\mathscr{B}_{x_2}(A_2)/A_1\times A_2$$

是 $N_{(x_1,x_2)}$ 的基.

证明是直接的.

2.7 引理 设 $(X,\mathscr{U})$ 是不分明化一致空间, $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{U}$ 的不分明化拓扑, 则对任意 $x,y\in X$.

$$\mathscr{B}_{(x,y)}=\int_{u\subseteq X\times X\text{是对称的}}\mathscr{U}(u)/u[x]\times u[y]$$

是 $N_{(x,y)}$ 的基. 其中 $N_{(x,y)}$ 是 (x,y) 关于 $\mathscr{T}\times\mathscr{T}$ 的不分明化邻域系.

证明 首先, 对任意 $v\subseteq X\times X$, 若 v 不是两个集合的积, 则 $\mathscr{B}_{(x,y)}(v)=0\leqslant N_{(x,y)}(v)$.

若 $v=A\times B$, 则

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{(x,y)}(v)&=\sup\{\mathscr{U}(u):u\text{ 是对称的}, u[x]=A, u[y]=B\}\\&\leqslant\sup\{\mathscr{U}(u):u[x]=A\}\wedge\sup\{\mathscr{U}(u):u[y]=B\}\\&=N_x(A)\wedge N_y(B)\leqslant N_{(x,y)}(A\times B)=N_{(x,y)}(v).\end{aligned}$$

因此 $\mathscr{B}_{(x,y)}\subseteq N_{(x,y)}$. 此外, 对任意 $w\subseteq X\times X$, 由 2.3 定理(1)和 2.6 引理, 有

$$N_{(x,y)}(w) \leqslant \sup\{\mathscr{U}(u) \wedge \mathscr{U}(v) \mid u[x] \times v[y] \subseteq w\}$$
$$\leqslant \sup\{\mathscr{U}(u \cap v) \mid (u \cap v)[x] \times (u \cap v)[y] \subseteq w\}$$
$$= \sup\{\mathscr{U}(u) \mid u[x] \times u[y] \subseteq w\}$$
$$\leqslant \sup\{\mathscr{U}(u \cap v^{-1}) \mid (u \cap v^{-1})[x] \times (u \cap v^{-1})[y] \subseteq w\}$$
$$= \sup\{\mathscr{U}(u) \mid u[x] \times u[y] \subseteq w \text{ 且 } u \text{ 是对称的}\}.$$

□

2.8 **定理** 设$(X, \mathscr{U})$是不分明化一致空间，$\mathscr{T}$是$\mathscr{U}$的不分明化拓扑，则

(1)对任意$A \subseteq X, x \in X$

$\models x \in \overline{A} \leftrightarrow (\forall u)((u \in \mathscr{U}) \rightarrow (x \in u[A]))$.

其中$\overline{A}$是A关于$\mathscr{T}$的闭包.

(2)对任意$M \subseteq X \times X, x, y \in X$,

$\models (x, y) \in \overline{M} \leftrightarrow (\forall u)((u \in \mathscr{U}) \rightarrow ((x, y) \in u \circ M \circ u))$.

其中$\overline{M}$是M关于$\mathscr{T} \times \mathscr{T}$的闭包.

证明 (1)由第一章3.6定理(2)和本节2.3定理(1)得到

$$\overline{A} = \inf_{A \cap B = \varnothing}(1 - N_x(B)) = \inf_{A \cap B = \varnothing}(1 - \sup_{u[x] = B}\mathscr{U}(u))$$
$$= \inf_{A \cap B = \varnothing}\inf_{u[x] = B}(1 - \mathscr{U}(u)) = \inf_{A \cap u[x] = \varnothing}(1 - \mathscr{U}(u))$$
$$= \inf_{x \in u^{-1}[A]}(1 - \mathscr{U}(u)).$$

上述证明中注意到$A \cap u[x] = \varnothing$的充要条件是$x \notin u^{-1}[A]$.

此外，

$$\inf_{x \notin u^{-1}[A]}(1 - \mathscr{U}(u)) = \inf_{x \in u^{-1}[A]}(1 - \mathscr{U}(u \cap u^{-1}))$$
$$\geqslant \inf_{x \notin (u \cap u^{-1})[A]}(1 - \mathscr{U}(u \cap u^{-1}))$$
$$= \inf\{1 - \mathscr{U}(u) \mid x \notin u[A] \text{且对称的}\}$$
$$\geqslant \inf_{x \notin u[A]}(1 - \mathscr{U}((u))$$

同样的，我们有

$$\inf_{x \notin u[A]}(1-\mathcal{U}(u)) \geqslant \inf_{x \notin u^{-1}[A]}(1-\mathcal{U}(u)).$$

因此，

$\overline{A}(x) = \inf_{x \notin u[A]}(1-\mathcal{U}(u)) = [(\forall u)((u \in \mathcal{U}) \to (x \in u[A]))]$.

(2)据2.7引理，有

$$\begin{aligned}\overline{M}(x,y) &= \inf_{M \cap w = \varnothing}(1-N_{(x,y)}(w)) \\ &= \inf_{M \cap w = \varnothing}(1-\sup\{\mathcal{U}(u) \mid u[x] \times u[y] \subseteq w, u \text{ 是对称的}\}) \\ &= \inf_{M \cap w = \varnothing} \inf\{1-\mathcal{U}(u) \mid u[x] \times u[y] \subseteq w, u \text{ 是对称的}\}) \\ &= \inf\{1-\mathcal{U}(u) \mid M \cap (u[x] \times u[y]) = \varnothing, u \text{ 是对称的}\} \\ &= \inf\{1-\mathcal{U}(u) \mid (x,y) \notin u \circ M \circ u, u \text{ 是对称的}\}\end{aligned}$$

上述证明中注意到 $M \cap (u[x] \times u[y]) = \varnothing$ 的充要条件是 $(x,y) \notin u \circ M \circ u$（参看 J. L. Kelley. General Toplogy, Theorem 6.7 的证明）[13]

此外，

$$\begin{aligned}&\inf\{1-\mathcal{U}(u) \mid (x,y) \notin u \circ M \circ u\} \\ &= \inf\{1-\mathcal{U}(u \cap u^{-1}) \mid (x,y) \notin u \circ M \circ u\} \\ &\geqslant \inf\{1-\mathcal{U}(u \cap u^{-1}) \mid (x,y) \notin (u \cap u^{-1} \circ M \circ (u \cap u^{-1})\} \\ &\inf\{1-\mathcal{U}(u) \mid (x,y) \notin u \circ M \circ u, u \text{ 是对称的}\}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\overline{M}(x,y) &= \inf\{1-\mathcal{U}(u) \mid (x,y) \notin u \circ M \circ u\} \\ &= [(\forall y)((u \in \mathcal{U}) \to ((x,y) \in (u \circ M \circ u)))]. \quad \square\end{aligned}$$

§3 不分明一致连续和积不分明化一致结构

3.1 **定义** 设$(X,\mathscr{U})$和$(Y,\mathscr{V})$是两个不分明化一致空间，一元不分明谓词$\overline{C}\in\mathscr{F}(Y^X)$称为不分明一致连续，定义为

$\overline{C}(f):=(\forall v)((v\in\mathscr{V})\to((f\times f)^{-1}(v)\in\mathscr{U})).f\in Y^X$

3.2 **引理** 设$(X,\mathscr{U})$和$(Y,\mathscr{V})$是两个不分明化一致空间，对任意$f\in Y^X$，

$\vDash\overline{C}(f)\leftrightarrow(\forall v)((v\in\mathscr{V})\to(\exists u)(u\in\mathscr{U})\wedge((f\times f)(u)\subseteq v)))$.

证明是直接的．

3.3 **引理** 设$(X,\mathscr{U})$和$(Y,\mathscr{V})$是两个不分明化一致空间，φ是$\mathscr{V}$的一个子基，则对任意$f\in Y^X$.

$\vDash\overline{C}(f)\leftrightarrow(\forall v)((v\in\varphi)\to((f\times f)^{-1}(v)\in\mathscr{U}))$.

证明 因为φ是$\mathscr{V}$的一个子基，因而对于任意的$v\subseteq Y\times Y$,

$$\mathscr{V}(v)\leqslant\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\mathscr{S}(v_i)\mid\bigcap_{i=1}^{n}v,n\in N\}$$

因此。

$$\begin{aligned}[\overline{C}(f)]&\geqslant\inf_{v\subseteq Y\times Y}\min(1,1-\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(v_i)\mid\bigcap_{i=1}^{n}v_i\subseteq v,n\in N\}+\\&\qquad\mathscr{U}((f\times f)^{-1}(v)))\\&=\inf_{v\subseteq Y\times Y}\inf\{\min(1,1-\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(v_i)+\mathscr{U}((f\times f)^{-1}(v))\mid\\&\qquad\bigcap_{i=1}^{n}v_i\subseteq v,n\in N\}\\&\geqslant\inf_{v\subseteq Y\times Y}\inf\{\min(1,1-\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(v_i)+\mathscr{U}((f\times f)^{-1}\\&\qquad(\bigcap_{i=1}^{n}v_i)))\mid\bigcap_{i=1}^{n}v_i\subseteq v,n\in N\}\\&=\inf_{v\subseteq Y\times Y}\inf\{\min(1,1-\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(v_i)+\mathscr{U}(\bigcap_{i=1}^{n}(f\times f)^{-1}\end{aligned}$$

$$(v_i)))|\bigcap_{i=1}^{n}v_i\subseteq v, n\in N\}$$

$$\geqslant \inf_{v\subseteq Y\times Y}\inf\{\min(1, 1-\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi(v_i)+\bigwedge_{i=1}^{n}\mathscr{U}((f\times f)^{-1}$$

$$(v_i)))|\bigcap_{i=1}^{n}v_i\subseteq v, n\in N\}$$

$$\geqslant \inf_{v\subseteq Y\times Y}\inf\{\inf_{i=1,\cdots,n}\min(1, 1-\varphi(v_i)+\mathscr{U}((f\times f)^{-1}$$

$$(v_i)))|\bigcap_{i=1}^{n}v_i\subseteq v, n\in N\}$$

$$=\inf_{v\subseteq Y\times Y}\min(1, 1-\varphi(v)+\mathscr{U}((f\times f)^{-1}(v)))$$

$$=[(\forall v)((v\in\varphi)\to((f\times f)^{-1}(v)\in\mathscr{U}))].$$

反向不等式是明显的． □

3.4 **引理** 设$(X,\mathscr{U})$,$(Y,\mathscr{V})$和$(Z,\mathscr{W})$是三个不分明化一致空间,对于任意$f\in Y^X, g\in Z^Y$.

(1) $\models \overline{C}(f)\to(\overline{C}(g)\to\overline{C}(g\circ f))$.

(2) $\models \overline{C}(g)\to(\overline{C}(f)\to\overline{C}(g\circ f))$.

证明 完全类似于第一章 7.2 引理的证明． □

3.5 **定理** 设$(X,\mathscr{U})$和$(Y,\mathscr{V})$是两个不分明化一致空间,且$\mathscr{T}$和τ分别是$\mathscr{U}$和$\mathscr{V}$的不分明化拓扑,则对任意$f\in Y^Z$,

$$\models \overline{C}(f)\to C(f)$$

其中C是关于$\mathscr{T}$和τ的不分明连续映射．

证明 对任意$x\in f^{-1}(B)$,若$v\subseteq Y\times Y$且$v[f(x)]\subseteq B$,则不难证明$(f\times f)^{-1}(v)[x]\subseteq f^{-1}(B)$. 因此,

$$\sup_{u[x]\subseteq f^{-1}(B)}\mathscr{U}(u)\geqslant\sup_{v[f(x)]\subseteq B}\mathscr{U}((f\times f)^{-1}(v)).$$

进而,有

$$\inf_{x\in f^{-1}(B)}\sup_{u(x)\subseteq f^{-1}(B)}\mathscr{U}(u)\geqslant\inf_{x\in f^{-1}(B)}\sup_{v[f(x)]\subseteq B}\mathscr{U}((f\times f)^{-1}(v))$$

$$=\inf_{f(x)\in B}\sup_{v[f(x)]\subseteq B}\mathscr{U}((f\times f)^{-1}(v))$$

$$\geqslant\inf_{y(x)\in B}\sup_{v[f(y)]\subseteq B}\mathscr{U}((f\times f)^{-1}$$

$(v))$.

$$[C(f)] = \inf_{B\subseteq Y}\min(1, 1-\tau(B)+\mathscr{T}(f^{-1}(B)))$$
$$= \inf_{B\subseteq Y}\min(1, 1-\inf_{y\in B}\sup_{v[y]\subseteq B}\mathscr{V}(v)+\inf_{x\in f^{-1}(B)}\sup_{u[x]\subseteq f^{-1}(B)}\mathscr{U}(u))$$
$$\geqslant \inf_{B\subseteq Y}\min(1, 1-\inf_{y\in B}\sup_{v[y]\subseteq B}\mathscr{V}(v)+\inf_{y\in B}\sup_{v[y]\subseteq B}\mathscr{U}((f\times f)^{-1}(v)))$$
$$\geqslant \inf_{B\subseteq Y}\inf_{y\in B}\inf_{v[y]\subseteq B}\min(1, 1-\mathscr{V}(v)+\mathscr{U}((f\times f)^{-1}(v)))$$
$$= [\overline{C}(f)].\quad \square$$

3.6 **定义** 设 Σ 是不分明化一致空间类，称二元不分明谓词 $\widetilde{H}\in\mathscr{F}(\Sigma\times\Sigma)$ 为不分明一致等价，定义为

$$\widetilde{H}(X, Y) := (\exists f)(M(f)\wedge(\overline{C}(f)\wedge\overline{C}(f^{-1})))$$

其中 $M(f)$ 表示 f 是一个双射．

3.7 **引理** 不分明一致等价是一个三角范数 $W(a,b)=max(0, a+b-1), a, b\in[0,1)$ 的 W—不分明等价关系． □

3.8 **引理** 设 F 是一个函数簇．对任意 $f\in F$，令 $(Y_f, \mathscr{U}_f)$ 是一不分明化一致空间，$f: X\to Y_f$．则

$$\varphi = \int_{f\in F, u\subseteq Y_f\times Y_f}\mathscr{U}_f(u)/(f\times f)^{-1}(u)$$

是 X 上某个不分明化一致结构 $\mathscr{U}$ 的子基，且该 $\mathscr{U}$ 是 X 上满足条件

$$\models(\forall f)((f\in F)\to\overline{C}(f))$$

的最小不分明化一致结构．

证明 完全类似于第二章 1.2 引理的证明，略． □

3.9 **定义** 设 $\{(X_a, \mathscr{U}_a): a\in A\}$ 是一簇不分明化一致空间，则 $\times_{a\in A}X_a$ 上满足

$$\models(\forall a)((a\in A)\to\overline{C}(P_a))$$

的最小的一致结构 $\times_{a\in A}\mathscr{U}_a$ 称为 $\{\mathscr{U}_a \mid a\in A\}$ 的积不分明化一致

结构，且称$(\times_{a\in A}X_a, \times_{a\in A}\mathscr{U}_a)$为$\{(X_a, \mathscr{U}_a): a\in A\}$的积不分明化一致空间．

3.10 **引理** 设X是一个集合，且$\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$是$X$上两个不分明化拓扑，若对任意$x\in X$，$N_x^1$和$N_x^2$都有相同的子基$\varphi_x$，其中$N_x^1$，$N_x^2$分别是$x$关于$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$的不分明化邻域系．则$\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$.

证明是直接的．

3.11 **引理** 设$(X, \mathscr{T})$是一簇不分明化拓扑空间$\{(X_a, \mathscr{T}_a): a\in A\}$的积，对任意$a\in A$，$\varphi_a$是$X_a$关于$\mathscr{T}_a$的邻域系的子基．则

$$\varphi=\int_{a\in A,\, B\subseteq X_a}\varphi_a(B)/P_a^{-1}(B)$$

是X关于$\mathscr{T}$的邻域系的子基．

证明 根据第一章基的定义和第二章积不分明化拓扑的定义，有

$$N_x(c)\leqslant\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\mathscr{T}_{a_i}(u_i)\mid x\in\bigcap_{i=1}^{n}P_{a_i}^{-1}(u_i)\subseteq C,\ u_i\subseteq X_{a_i},\ a_i\in A\ (i=1,\cdots,n),\ n\in N\}$$

因为φ_{a_i}是x_{a_i}关于$\mathscr{T}_{a_i}$的邻域系的子基且$x_{a_i}\in u_i\ (i=1,\cdots,n)$，因而

$$N_x(c)\leqslant\sup\{\bigwedge_{i=1}^{n}\sup\{\bigwedge_{i=1}^{m_i}\varphi_{a_i}(v_{ij})\mid x_{a_i}\in\bigcap_{j=1}^{m_i}v_{ij}\subseteq u_i\}\mid x\in\bigcap_{i=1}^{n}P_{a_i}^{-1}(u_i)\subseteq C,\ u_i\subseteq X_{a_i},\ a_i\in A\quad(i=1,\cdots,n),\ n\in N\}$$

$$=\sup\{\sup_{f\in\Pi_{i=1}^{n}M_i}\bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{m_i}\varphi_{a_i}(f(i)_j)\mid x\in\bigcap_{i=1}^{n}p_{a_i}^{-1}(u_i)\subseteq c,\ u_i\subseteq X_{a_i},\ a_i\in A\ (i=1,\cdots,n),\ n\in N\}$$

其中$M_i=\{(v_{i1},\cdots,v_{im_i})\mid x_{a_i}\in\bigcap_{i=1}^{m_i}v_{ij}\subseteq u_i\}\ (i=1,\cdots,n)$.

若$f\in\Pi_{i=1}^{n}M_i$，$x\in\bigcap_{i=1}^{n}p_{a_i}^{-1}(u_i)\subseteq c$，则

$$x\in\bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m_i}p_{a_i}^{-1}(f(i)_j)=\bigcap_{i=1}^{n}p_{a_i}^{-1}(\bigcap_{j=1}^{m_i}f(i)_j)\subseteq c.$$

因此,

$$N_x(c)\leqslant\sup\{\bigwedge_{i=1}^{k}\varphi_{a_i}(b_i)\mid x\in\bigcap_{i=1}^{k}p_{a_i}^{-1}(B_i)\subseteq C, B_i\subseteq X_{a_i}, a_i\in A$$
$(i=1,\cdots,k), k\in N\}$

故而结论得证. □

3.12　**定理**　设$\{(X_a,\mathscr{U}_a):\in A\}$是一族不分明化一致空间且对任意$a\in A$,$\mathscr{T}_a$是$\mathscr{U}_a$的不分明化拓扑,则$\times_{a\in A}\mathscr{T}_a$是$\times_{a\in A}\mathscr{U}$的不分明化拓扑.

证明　对任意$x\in X$,据2.3定理(2)知

$$\varphi=\int_{a\in A,u\subseteq X_a\times X_a}\mathscr{U}_a(u)/(p_a\times p_a)^{-1}(u)[x]$$

是x关于$\times_{a\in A}\mathscr{U}_a$的不分明化拓扑邻域系的子基,且对任意$a\in A$,

$$\varphi_a=\int_{u\subseteq X_a\times X_a}\mathscr{U}_a(u)/u[x_a]$$

是x_a关于$\mathscr{T}_a$的邻域系的子基。由3.11引理,

$$\bar{\varphi}=\int_{a\in A,u\subseteq X_a\times X_a}\mathscr{U}_a(u)/P_a^{-1}(u[x])$$

是x关于$\times_{a\in A}\mathscr{T}_a$的邻域系的子基. 注意到$P_a^{-1}(u[x_a])=(p_a\times p_a)^{-1}(u)[x]$,则有$\varphi=\bar{\varphi}$. 最后再由3.10引理,定理得证.
□

最后我们讨论关于X的一致结构和伪度量之间的关系。

3.13　**定理**　设$(X,\mathscr{U})$是一不分明化一致空间,d是X上的一个伪度量,则

$$\models\bar{C}(d)\leftrightarrow(\forall r)((r>0)\rightarrow(V_{d,r}\in\mathscr{U}))$$

其中$V_{d,r}=\{(x,y)\in X\times X\mid d(x,y)<r\}(r>0)$.

证明　令

$$u_r=\{(a,b)\in R\times R\mid |a-b|<r\}(r>0)$$

因为$\{u_r\mid r>0\}$是R上通常一致结构的基,依据3.3引理则有

$$\models \overline{C}(d) \leftrightarrow (\forall r)((r>0) \rightarrow ((d\times d)^{-1}(u_r) \in \mathscr{U}\times\mathscr{U}))$$

对任意 $r>0$，我们有

$$(p_1\times p_1)^{-1}(V_{d,r/2}) \cap (p_2\times p_2)^{-1}(V_{d,r/2}) \subseteq (d\times d)^{-1}(u_r)$$

且

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(V_{d,r/2}) &\leqslant (\mathscr{U}\times\mathscr{U})((P_1\times P_1)^{-1}(V_{d,r/2})) \wedge (\mathscr{U}\times\mathscr{U})((P_2\times P_2)^{-1}(V_{d,r/2}))\\ &\leqslant (\mathscr{U}\times\mathscr{U})((P_1\times P_1)^{-1}(V_{d,r/2})) \cap (P_2\times P_2)^{-1}(V_{d,r/2}))\\ &\leqslant (\mathscr{U}\times\mathscr{U})(d\times d)^{-1}(u_r)).\end{aligned}$$

其中 $P_i: X\times X \rightarrow X$，对任意 $x_1, x_2 \in X (x_1, x_2) \rightarrow x_i (i=1,2)$，因此，

$$\inf_{r>0} \mathscr{U}(V_{d,r}) \leqslant \inf_{r>0} (\mathscr{U}\times\mathscr{U})((d\times d)^{-1}(u_r)).$$

令 $\mathscr{B} = \int_{u\subset X\times X} \mathscr{U}(u)/(p_1\times p_1)^{-1}(u) \cap (p_2\times p_2)^{-1}(u).$

则 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}\times\mathscr{U}$ 的基．事实上，由 3.9 定义，

$$\varphi = \int_{u\subseteq X\times X} \mathscr{U}(u)/(P_1\times P_1)^{-1}(u) \cup \int_{u\subseteq X\times X} \mathscr{U}(u)/(p_2\times p_2)^{-1}(u)$$

是 $\mathscr{U}\times\mathscr{U}$ 的一个子基．对任意 $u\subseteq X\times X$，

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(u) &\leqslant \sup_{v\subseteq u} \varphi^{(\cap)}(v)\\ &= \sup\{\bigwedge_{i=1}^{m} \mathscr{U}(V_{1i}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mathscr{U}(V_{2i}) \mid \bigcap_{i=1}^{m} (p_1\times p_1)^{-1}(V_{1i}) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (p_2\times p_2)^{-1}(V_{2i}) \subseteq u\}\\ &\leqslant \sup\{\mathscr{U}(\bigcap_{i=1}^{m} V_{1i} \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{2i}) \mid \bigcap_{i=1}^{m} (p_1\times p_1)^{-1}(V_{1i}) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (p_2\times p_2)^{-1}(V_{2i}) \subseteq u\}\\ &\leqslant \sup\{\mathscr{U}(\bigcap_{i=1}^{m} V_{1i} \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{2i}) \mid (p_1\times p_1)^{-1}(\bigcap_{i=1}^{m} v_{1i} \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{2i})\end{aligned}$$

$$\cap(p_2\times p_2)^{-1}(\bigcap_{i=1}^{m}V_{1i}\cap\bigcap_{i=1}^{n}(V_{2i}))\subseteq u\}$$

$$\leqslant\sup\{\mathscr{U}(v)\mid(p_1\times p_1)^{-1}(v)\cap(p_2\times p_1)^{-1}(v)\subseteq u\}$$

因此,对任意 $r>0$,注意到$(p_1\times p_1)^{-1}(u)\cap(p_2\times p_2)^{-1}(u)\subseteq(d\times d)^{-1}(u_r)$推出 $u\subseteq v_{d,r}$,从而得到

$$\inf_{r>0}(\mathscr{U}\times\mathscr{U})((d\times d)^{-1}(u_r))\leqslant\inf_{r>0}\sup\{\mathscr{U}(u)\mid(p_1\times p_1)^{-1}(u)\cap(p_2\times p_2)^{-1}(u)\subseteq(d\times d)^{-1}(u_r)\}$$

$$\leqslant\inf_{r>0}\sup_{u\subseteq V_{d,r}}\mathscr{U}(u)=\inf_{r>0}\mathscr{U}(V_{d,r})\quad\square$$

第九章　不分明化拓扑群

§1　不分明化拓扑群

1.1　**定义**　设论域 G 是一群，$(G,\mathscr{T})$ 为不分明化拓扑空间，对任何 $x\in X$，N_x 是 x 的不分明化邻域系，而且满足

(G_1)对任何 x、$y\in G$，$A\in\mathscr{P}(G)$，有

$\models(A\in N_{xy})\rightarrow(\exists B)(\exists C)((B\in N_x)\wedge(C\in N_y)\wedge(BC\subseteq A))$

(G_2)对任何 $x\in G$，$A\in\mathscr{P}(G)$，有

$\models(A\in N_{x^{-1}})\rightarrow(\exists B)((B\in N_x)\wedge(B^{-1}\subseteq A))$

则称$(G,\mathscr{T})$为不分明化拓扑群．

作为一个特例，分明拓扑群若取 $\mathscr{T}$ 和 N_x 的特征函数，则它显然是一个不分明化拓扑群．

1.2　**定理**　$(G,\mathscr{T})$为不分明化拓扑群当且仅当下列条件成立

(G_3)对任何 $x,y\in G$，$A\in\mathscr{P}(G)$，有

$\models(A\in N_{xy^{-1}})\rightarrow(\exists B)(\exists C)((B\in N_x)\wedge(C\in N_y)\wedge(BC^{-1}\subseteq A))$

证明　若$(G,\mathscr{T})$为不分明化拓扑群，则(G_1)与(G_2)成立，即对任何 x、$y\in G$，$A\in\mathscr{P}(G)$，有

$$\sup_{B、C\in\mathscr{P}(G)}\min(N_x(A),N_y(C))\geqslant N_{xy}(A)$$

$$\sup_{\substack{B\in\mathscr{P}(G)\\ B^{-1}\subseteq A}}N_x(B)\geqslant N_{x^{-1}}(A)$$

因此

$$[(\exists B)(\exists C)((B \in N_x) \wedge (C \in N_y) \wedge (BC^{-1} \subseteq A))] =$$

$$\sup_{\substack{BC \in \mathscr{P}(G) \\ BC^{-1} \subseteq A}} \min(N_x(B), N_y(C))$$

$$\geqslant \sup_{\substack{B、C、D \in \mathscr{P}(G) \\ BC^{-1} \subseteq BD \subseteq A}} \min(N_x(B), N_y(C))$$

$$= \sup_{\substack{BD \in \mathscr{P}(G) \\ BD \subseteq A}} \sup_{\substack{C \in \mathscr{P}(G) \\ C^{-1} \subseteq D}} \min(N_x(B), N_y(C))$$

$$= \sup_{\substack{BD \in \mathscr{P}(G) \\ BD \subseteq A}} \min(N_x(B), \sup_{\substack{C \in \mathscr{P}(G) \\ C^{-1} \subseteq D}} N_y(C))$$

$$\geqslant \sup_{\substack{BD \in \mathscr{P}(G) \\ BD \subseteq A}} \min(N_x(B), N_{y^{-1}}(D)]$$

$$\geqslant N_{xy^{-1}}(A) = [A \in N_{xy^{-1}}]$$

(G_3)成立．

反之，若(G_3)成立，则对任何 $x, y \in G, A \in \mathscr{P}(G)$，有

$$\sup_{\substack{BC \in \mathscr{P}(G) \\ BC^{-1} \subseteq A}} \min(N_x(B), N_y(C)) \geqslant N_{xy^{-1}}(A).$$

我们取 $x = e$（e 为G 中单位元），则

$$N_{y^{-1}}(A) \leqslant \sup_{\substack{BC \in \mathscr{P}(G) \\ BC^{-1} \subseteq A}} \min(N_e(B), N_y(C))$$

$$\leqslant \sup_{\substack{BC \in \mathscr{P}(G) \\ C^{-1} \subseteq BC^{-1} \subseteq A}} \min(N_e(B), N_y(C))$$

$$\leqslant \sup_{\substack{C \in \mathscr{P}(G) \\ C^{-1} \subseteq A}} N_y(C)$$

故(G_2)成立．

又在(G_3)中用 y 来代替 y^{-1}，则

$$N_{xy}(A) \leqslant \sup_{\substack{B、C \in \mathscr{P}(G) \\ BC^{-1} \subseteq A}} \min(N_x(B), N_{y^{-1}}(C))$$

$$\leqslant \sup_{\substack{B、C \in \mathscr{P}(G) \\ BC^{-1} \subseteq A}} \min(N_x(B) \sup_{\substack{D \in \mathscr{P}(G) \\ D^{-1} \subseteq C}} N_y(D))$$

$$= \sup_{\substack{B、C \in \mathscr{P}(G) \\ BC^{-1} \subseteq A}} \sup_{\substack{D \in \mathscr{P}(G) \\ D^{-1} \subseteq C}} \min(N_x(B), N_y(D))$$

$$= \sup_{\substack{B、C、D\in \mathscr{P}(G)\\ BD\subseteq BC^{-1}\subseteq A}} \min(N_x(B), N_y(D))$$

$$\leqslant \sup_{\substack{B、D\in \mathscr{P}(G)\\ BD\subseteq A}} \min(N_x(B), N_y(C))$$

故(G_1)成立．从而$(G,\mathscr{T})$为不分明化拓扑群． □

1.3 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$为不分明化拓扑群，N_x 为$x\in G$ 的邻域系，则对任何 x、y、A、B 有

(1)$\models A^{-1}\in N_x\leftrightarrow A\in N_{x^{-1}}$;

(2)$\models A\in N_{xy}\leftrightarrow x^{-1}A\in N_y$;

(3)$\models A\in N_{xy}\leftrightarrow Ay^{-1}\in N_x$;

(4)$\models A\in \mathscr{T}\leftrightarrow A^{-1}\in \mathscr{T}$;

(5)$\models A\in \mathscr{T}\leftrightarrow xA\in \mathscr{T}$;

(6)$\models A\in \mathscr{T}\leftrightarrow Ax\in \mathscr{T}$;

(7)$\models A\in \mathscr{T}\leftrightarrow AB\in \mathscr{T}$;

(8)$\models A\in \mathscr{T}\leftrightarrow BA\in \mathscr{T}$;

证明 (1)由(G_2)可得

$$[A^{-1}\in N_x] = N_x(A^{-1}) = \sup_{B\subset A^{-1}} N_x(B) = \sup_{B^{-1}\subseteq A} N_x(B) \geqslant N_{x^{-1}}(A) = [A\in N_{x^{-1}}].$$

同理可证$[A\in N_{x^{-1}}]\geqslant[A^{-1}\in N_x]$.

(2)由(G_1)可得

$$[A\in N_{xy}] = N_{xy}(A)\leqslant \sup_{BC\subseteq A}\min(N_x(B), N_y(C))\leqslant \sup_{xy\in BC\subseteq A}\min(N_x(B). N_y(C))\leqslant \sup_{xy\in BC\subseteq A} N_y(C)\leqslant \sup_{xy\in xc\subseteq A} N_y(C) = \sup_{x\in c\subseteq x^{-1}A} N_y(c) = N_y(x^{-1}A) = [x^{-1}A\in N_y].$$

反之，$[x^{-1}A\in N_y] = N_y(x^{-1}A) = N_{x^{-1}xy}(x^{-1}A)\leqslant \sup_{BC\subseteq x^{-1}A}\min (N_{x^{-1}}(B), N_{xy}(c)) = \sup_{x^{-1}xy\in BC\subseteq x^{-1}A}\min(N_{x^{-1}}(B)、N_{xy}(C))\leqslant \sup_{x^{-1}xy\in BC\subseteq x^{-1}A} N_{xy}(C)\leqslant \sup_{x^{-1}xy\in x^{-1}c\subseteq x^{-1}A} N_{xy}(C) = \sup_{xy\in c\subseteq A} N_{xy}(c) = N_{xy}(A) = [A\in N_{xy}]$.

(3)证法同(2).

(4)由(1)可得

$[A\in\mathscr{T}]=\mathscr{T}(A)=\inf\limits_{x^{-1}\in A}N_{x^{-1}}(A)=\inf\limits_{x\in A^{-1}}N_x(A^{-1})=\mathscr{T}(A^{-1})$
$=[A^{-1}\in\mathscr{T}]$

(5)$\mathscr{T}(xA)=\inf\limits_{xy\in xA}N_{xy}(xA)=\inf\limits_{xy\in xA}N_{x^{-1}xy}(A)=\inf\limits_{y\in A}N_y(A)=\mathscr{T}(A)$

(6)证法同(5)

(7)$\mathscr{T}(BA)=\mathscr{T}(\bigcup\limits_{x\in B}xA)\geqslant\inf\limits_{x\in B}\mathscr{T}(xA)=\inf\limits_{x\in B}\mathscr{T}(A)=\mathscr{T}(A)$

(8)证法同(7). □

1.4 **定义** 设$(G,\mathscr{T})$为不分明化拓扑群，G 中单位元e 的邻域系N_e 称为$(G,\mathscr{T})$的不分明化单位邻域系.

1.5 **定理** 若N_e 是$(G,\mathscr{T})$的单位邻域系，则

(E_1)对任何 A 有$\models A\in N_e\to e\in A$;

(E_2)对任何 A、B 有$\models(A\in N_e)\wedge(B\in N_e)\to(A\cap B\in N_e)$;

(E_3)对任何 A、B 有$\models(A\subseteq B)\to(A\in N_e\to B\in N_e)$;

(E_4)对任何 A 有$\models(A\in N_e)\to(\exists B)(\exists C)((B\in N_e)\wedge(C\in N_e)\wedge(BC^{-1}\subseteq A))$;

(E_5)对任何 x,A 有$\models(A\in N_e)\to(\exists B)((B\in N_e)\wedge(xB\subseteq A))$;

(E_6)对任何 x、A 有$\models(A\in N_e)\to(\exists B)((B\in N_e)\wedge(xBx^{-1}\subseteq A))$;

证明 (E_1)、(E_2)、(E_3)分别由第二章 1.7 定理的(1)、(2)、(3)得到，(E_4)由(G_3)得到，现证明(E_5)：$[(\exists B)((B\in N_e)\wedge(xB\subseteq A))]=\sup\limits_{xB\subseteq A}N_e(B)=\sup\limits_{c\subseteq A}N_e(x^{-1}c)$(令 $xB=c$)

$\geqslant\sup\limits_{c\subseteq A}\min(N_e(c)、N_e(x^{-1}c))\geqslant\sup\limits_{c\subseteq A}\min(N_e(c),\inf\limits_{x\in c}N_e(x^{-1}c))$

$=\sup\limits_{c\subseteq A}\min(N_e(c),\inf\limits_{x\in c}N_x(c))=\sup\limits_{c\subseteq A}\min(N_e(c),\mathscr{T}(c))$

$=\sup\limits_{c\subseteq A}\mathscr{T}(c)\geqslant\sup\limits_{e\in c\subseteq A}\mathscr{T}(c)=N_e(A)=[A\in N_e]$

再证(E_6)：

$$[(\exists B)((B\in N_e)\wedge(xBx^{-1}\subseteq A))]=\sup_{xBx^{-1}\subseteq A}N_e(B)=\sup_{c\subseteq A}N_c$$

$(x^{-1}cx)$(令 $xBx^{-1}=C$)

$$=\sup_{c\subseteq A}N_e(cx)=\sup_{c\subseteq A}N_e(c)=N_e(A)=[A\in N_e].\quad\square$$

1.6 **定理** 设 G 是一群，$N\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(G))$是$\mathscr{P}(G)$上的一个正规不分明集合，若 N 满足 1.5 定理中的条件(E_1)、(E_2)、(E_3)，则如下定义的$\mathscr{T}$是 G 上的一个不分明化拓扑，$A\in\mathscr{T}:=(\forall x)((x\in A)\rightarrow(x^{-1}A\in N))$. 又若 N 满足(E_4)、(E_5)、(E_6)，则$(G,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑群，且 N 为$(G,\mathscr{T})$的单位邻域系．

证明 首先假设 N 满足(E_1)、(E_2)、(E_3)，则由(E_1)知对任何 $e\notin A$，$N(A)=0$，再由$\mathscr{T}$的定义得 $\mathscr{T}(A)=\inf_{x\in A}N(x^{-1}A)$. 往证$\mathscr{T}$是 G 上的一个不分明化拓扑．

其一，因为 $x^{-1}G=G$，因此 $\mathscr{T}(G)=\inf_{x\in G}N(x^{-1}G)=\inf_{x\in G}N(G)$. 由 N 的正规性知，存在 $B\in\mathscr{T}(G)$，使 $N(B)=1$. 又由(E_3)和 $B\subseteq G$，故 $N(G)=1$，从而 $\mathscr{T}(G)=1$.

其二，对任何 A、B、$\mathscr{T}(A\cap B)=\inf_{x\in A\cap B}N(x^{-1}(A\cap B))$.（由 E_2）$\inf_{x\in A\cap B}N(x^{-1}(A\cap B))\geqslant\inf_{x\in A\cap B}\min N(x^{-1}(A),N(x^{-1}(B))$

$$=\min(\inf_{x\in A\cap B}N(x^{-1}(A),\ \inf_{x\in A\cap B}N(x^{-1}(B))\geqslant\min(\inf_{x\in A}N$$

$$(x^{-1}A),\inf_{x\in B}(x^{-1}B))$$

$$=\min(\mathscr{T}(A),\mathscr{T}(B)).$$

其三，对任何$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，由($E_3$)可得

$$\mathscr{T}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\inf_{x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}N(x^{-1}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\inf_{\lambda\in\Lambda}\inf_{x\in A_\lambda}N(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}x^{-1}A_\lambda)$$

$$\geqslant\inf_{\lambda\in\Lambda}\inf_{x\in A_\lambda}N(x^{-1}A_\lambda)=\inf_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}(A_\lambda).$$

因此，$(G,\mathscr{T})$是一个不分明化拓扑空间．

其次，假设 N 又满足(E_4)、(E_5)、(E_6)对任何 $x\in G$，定义

$N_x \in \mathscr{F}(\mathscr{P}(G))$如下

$$A \in N_x := x^{-1}A \in N$$

往证 N_x 是$(G,\mathscr{T})$中 $x \in G$ 的不分明化邻域系，即证 $N_x(A) = \sup_{x \in B \subseteq A} \mathscr{T}(B)$，事实上

$$\sup_{x \in B \subseteq A} \mathscr{T}(B) = \sup_{x \in B \subseteq A} \inf_{x \in B} N(x^{-1}B) \leqslant \sup_{x \in B \subseteq A} N(x^{-1}B) = \sup_{e \in x^{-1}B \subseteq x^{-1}A} N(x^{-1}B) = N(x^{-1}A) = N_x(A).$$

反之，

$$N_x(A) = N(x^{-1}A) \leqslant \inf_{y \in x^{-1}A} \sup_{yB \subseteq x^{-1}A} N(B) = \inf_{x^{-1}z \in x^{-1}A} \sup_{x^{-1}zB \subseteq x^{-1}A} N(B)$$

$$= \inf_{z \in A} \sup_{zB \in A} N(B) = \inf_{z \in A} \sup_{c \subseteq A} N(z^{-1}C) = \inf_{z \in A} N(z^{-1}A) = \sup_{z \in B \subseteq A} \inf_{z \in B} N(z^{-1}B)$$

$$= \sup_{z \in B \subseteq A} \mathscr{T}(B).$$

因此，对任何 A，$N_e(A) = N(e^{-1}A) = N(A)$，即 $N_e = N$. 故 N 为$(G,\mathscr{T})$的单位邻域系．

最后证明$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群，即 $N_x(x \in G)$满足(G_3)，事实上，由(E_4)和(E_6)可得

$$N_{xy^{-1}}(A) = N(yx^{-1}A) \leqslant \sup_{EF^{-1} \subseteq yx^{-1}A} \min(N(E), N(F))$$

$$\leqslant \sup_{EF^{-1} \subseteq yx^{-1}A} \min(\sup_{yBy^{-1} \subseteq E} N(B), \sup_{yCy^{-1} \subseteq F} N(c))$$

$$= \sup_{EF^{-1} \subseteq yx^{-1}A} \sup_{yBy^{-1} \subseteq E} \sup_{xy^{-1} \subseteq F} \min(N(B), N(C))$$

$$\leqslant \sup_{(xB)(yc)^{-1} \subseteq A} \min(N(B), N(c))$$

$$= \sup_{BC^{-1} \subseteq A} \min(N(x^{-1}B), N(y^{-1}c))$$

$$= \sup_{BC^{-1} \subseteq A} \min(N_x(B), N_y(c))$$

其中我们用到下述关系式

$$(xB)(yc)^{-1} = xBc^{-1}y^{-1} \subseteq xBy^{-1}F^{-1} \subseteq xy^{-1}EF^{-1}$$

$\subseteq xy^{-1}yx^{-1}A = A$ □

1.7 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群，则

$\vdash \mathscr{T}_3(G,\mathscr{T})$.

证明 对任意的x和A，若$x\in A$，则

$$\mathscr{T}(A)\leqslant N_x(A)=N_{xe^{-1}}(A)\leqslant \sup_{BC^{-1}\subseteq A}\min(N_x(B),N_e(c))$$

$$\leqslant \sup_{B\in\mathscr{F}(G)}\sup_{\substack{c\in\mathscr{F}(G)\\BC^{-1}\subseteq A}}\min(N_x(B),N_e(c))$$

$$=\sup_{B\in\mathscr{F}(G)}\min(N_x(B),\sup_{\substack{c\in\mathscr{F}(G)\\BC^{-1}\subseteq A}}N_y(yc))$$

由于对任何$y\in A^c$，有$A^cC\cap B=\varnothing$(事实上，若$A^cC\cap B\neq\varnothing$，则存在$z\in A^c, c\in C, b\in B$，使$zc=b$，即$z=bc^{-1}\in BC^{-1}\subseteq A$与$z\in A^c$矛盾)．所以$A^cC\subset B^c$，故对任何$y\in A^c$有 $N_y(yc)\leqslant N_y(A^cC)\leqslant N_y(B^c)$，从而

$$\sup_{\substack{c\in\mathscr{F}(G)\\BC^{-1}\subseteq A}}N_y(yc)\leqslant N_y(B^c)\text{，即有}$$

$$\sup_{\substack{c\in\mathscr{F}(G)\\BC^{-1}\subseteq A}}N_y(yc)\leqslant \inf_{y\in A^c}N_y(B^c)\text{. 因此 }\mathscr{T}(A)\leqslant \sup_{B\in\mathscr{F}(G)}\min(N_x(B)\ \inf_{y\in A^c}N_y(B^c)).$$

所以$[A\in\mathscr{T}]\leqslant[(\exists B)((B\in N_x\wedge(\bar{B}\subseteq A)]$．定理得证． □

§2 子群和商群

2.1 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群，H是G的子群，则子空间$(H,\mathscr{T}|_H)$也构成一个不分明化拓扑群，称为$(G,\mathscr{T})$的子群.

证明 由第二章6.5定理，

$$\overset{H}{N}_{xy^{-1}}(A)=\sup_{B\cap H=A}N_{xy^{-1}}(B)\leqslant\sup_{B\cap H=A}\ \sup_{CD^{-1}\subseteq H}\min(N_x(C),N_y(D))$$

$$\leqslant \sup_{CD^{-1}\cap H\subseteq A} \min(N_x(C), N_y(D))$$
$$\leqslant \sup_{(C\cap H)(D\cap H)^{-1}\subseteq A} \min(N_x(C), N_y(D))$$
$$\leqslant \sup_{EF^{-1}\subseteq A} \sup_{\substack{C\cap H=E\\ D\cap H=F}} \min(N_x(C), N_y(D))$$
$$\leqslant \sup_{EF^{-1}\subseteq A} \min(\sup_{C\cap H=E} N_x(C), \sup_{D\cap H=F} N_y(D))$$
$$= \sup_{EF^{-1}\subseteq A} \min(N_x^H(E), N_y^H(F))$$

即(G_3)成立． □

2.2 **定义** 设 G 是一群，称一元谓词 $g\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(G))$为 G 上的不分明化子群，如果

$$A\in g:=(\forall x)(\forall y)((x\in A)\wedge(y\in A)\rightarrow xy^{-1}\in A)$$

2.3 **定理** 设$(A,\mathscr{T}|_A)$是不分明化拓扑群$(G,\mathscr{T})$的子群，则 $\vdash \bar{A}\in g$.

证明 只要证明对任何 $x,y\in G$，有 $\bar{A}(xy^{-1}\geqslant\min(\bar{A}(x),\bar{A}(y))$.

我们先证一个等式：对任何 $A\subseteq G$，有 $N_x^A(\varnothing)=N_x(A^c)$，事实上

$$N_x^A(\varnothing)=\sup_{B\cap A=\varnothing} N_x(B)=\sup_{B\subseteq A^c} N_x(B)=N_x(A^c)$$

因此，对任何 $x,y\in G$，我们有

$$\bar{A}(xy^{-1})=1-N_{xy^{-1}}(A^c)=1-N_{xy^{-1}}^A(\varnothing)\geqslant 1-\sup_{BC^{-1}\subseteq\varnothing}\min(N_x^A(B),N_y^A(C))$$
$$=1-max(\sup_{\substack{B=\varnothing\\ C\in\mathscr{P}(A)}}\min(N_x^A(B),N_y^A(C)),\sup_{\substack{C=\varnothing\\ B\in\mathscr{P}(A)}}\min(N_x^A(B),N_y^A(C)))$$
$$=1-max(\min(N_x^A(\varnothing),\sup_{C\in\mathscr{P}(A)}N_y^A(C)),\min(\sup_{C\in\mathscr{P}(A)}N_x^A(B),N_y^A(\varnothing)))$$
$$\geqslant 1-max(N_x^A(\varnothing),N_y^A(\varnothing))=1-max(N_x(A^c),$$

$N_y(A^c))$
$=\min(1-N_x(A^c),1-N_y(A^c))$
$=\min(\bar{A}(x),\bar{A}(y)).$ □

假设$(G,\mathscr{T})$是一不分明化拓扑群，H是G的一个子群，$G^*=G/H\{xH|x\in G\}$. f是G到G^*上的一个映射，作$\mathscr{T}^*\in\mathscr{F}(\mathscr{P}(G^*))$，规定

$A^*\in\mathscr{T}^*:=f^{-1}(A^*)\in\mathscr{T}$

则由第三章2.1引理知$\mathscr{T}^*$是G^*上的一个不分明化拓扑，事实上，(1)$\mathscr{T}^*(G^*)=\mathscr{T}(f^{-1}(G^*))=\mathscr{T}(G)=1$；(2)对任何$A^*,B^*\in\mathscr{P}(G^*)$，$\mathscr{T}^*(A^*\cap B^*)=\mathscr{T}(f^{-1}(A^*\cap B^*))=\mathscr{T}(f^{-1}(A^*)\cap f^{-1}(B^*))\geqslant\min(\mathscr{T}(f^{-1}(A^*)),\mathscr{T}(f^{-1}(B^*)))=\min(\mathscr{T}^*(A^*)$、$\mathscr{T}^*(B^*))$；(3)对任何$A_\lambda^*\in\mathscr{P}(G^*)$，$\lambda\in\Lambda$，$\mathscr{T}^*(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^*)=\mathscr{T}(f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^*))=\mathscr{T}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(A_\lambda^*))\geqslant\inf_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}(f^{-1}(A_\lambda^*))=\inf_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}^*(A_\lambda^*)$.

我们把$\mathscr{T}^*$称为G^*上关于f和$\mathscr{T}$所诱导的商拓扑，称$(G^*,\mathscr{T}^*)$为$(G,\mathscr{T})$的右陪集空间.

2.4　**定理**　设$(G,\mathscr{T})$为不分明化拓扑群，H是G的正规子群，$G^*=G/H$是G关于H的商群. f是G到G^*上的自然同态，$\mathscr{T}^*$是G^*上关于f和$\mathscr{T}$所诱导的商拓扑，则$(G^*,\mathscr{T}^*)$是一个不分明化拓扑群，称它为$(G,\mathscr{T})$的商群.

证明　设$N_x^*(x^*\in G^*)$为$(G^*,\mathscr{T}^*)$中的邻域系. 往证它在$(G^*,\mathscr{T}^*)$中(G_3)成立. 事实上，由邻域系的定义知，对任何$A^*\in\mathscr{P}(G^*)$，有$N_x^*(A^*)=\sup_{x^*\in B^*\subseteq A^*}\mathscr{T}^*(B^*)$，但又由$\mathscr{T}^*$的定义知

$\sup_{x^*\in B^*\subseteq A^*}\mathscr{T}^*(B^*)=\sup_{x^*\in B^*\subseteq A^*}\mathscr{T}(f^{-1}(B^*))\leqslant\sup_{x^*\in B^*\subseteq A^*}N_x(f^{-1}(B^*))$
$\leqslant\sup_{x^*\in B^*\subseteq A^*}N_x(f^{-1}(A^*))=N_x(f^{-1}(A^*))$，其中$x\in f^{-1}$

(x^*).

反之，对任何 $x\in f^{-1}(x^*)$我们有

$$N_x(f^{-1}(A^*))=\sup_{x\in B\subseteq f^{-1}(A^*)}\mathcal{T}(B)\leqslant\sup_{x^*\in B^*\subseteq A^*}\mathcal{T}(B)$$

$$\leqslant\sup_{x\in B^*\subseteq A^*}\mathcal{T}(BH)=\sup_{x^*\in B^*\subseteq A^*}\mathcal{T}(f^{-1}(B^*))=\sup_{x^*\in B^*\subseteq A^*}\mathcal{T}^*(B^*)$$

因此可得 $N_x^*(A^*)=N_x(f^{-1}(A^*))$，其中 $x\in f^{-1}(x^*)$.

另外，对任何 $x^*,y^*\in G^*$，若 $z\in f^{-1}(x^*y^{*-1})=f^{-1}(x^*)\cdot(f^{-1}(y^*))^{-1}$，则 $z=xy^{-1}$，其中 $x\in f^{-1}(x^*)$，$y\in f^{-1}(y^*)$. 反之，若 $x\in f^{-1}(x^*)$，$y\in f^{-1}(y^*)$，则

$$xy^{-1}\in f^{-1}(x^*)(f^{-1}(y^*))^{-1}=f^{-1}(x^*y^{*-1})$$

所以对任何 $x^*,y^*\in G^*$，$f^{-1}(x^*y^{*-1})=\{x\cdot y^{-1}\mid x\in f^{-1}(x^*),y\in f^{-1}(y^*)\}$，因此，我们有

$$N^*_{x^*y^{*-1}}(A^*)=N_{xy^{-1}}(f^{-1}(A^*))\leqslant\sup_{BC^{-1}\subseteq f^{-1}(A^*)}\min(N_x(B),N_y(C))$$

$$\leqslant\sup_{B^*C^{*-1}\subseteq A^*}\min(N_x(B),N_y(C))\leqslant\sup_{B^*C^{*-1}\subseteq A^*}\min(N_x(f^{-1}(B^*)),N_y(f^{-1}(C^*)))$$

$$=\sup_{B^*C^{*-1}\subseteq A^*}\min(N^*_{x^*}(B^*),N^*_{y^*}(C^*)).$$

即(G_3)成立． □

2.5 **定理** 设$(G,\mathcal{T})$为不分明化拓扑群，$(G^*,\mathcal{T}^*)$为$(G,\mathcal{T})$的商群，则对任何 G^* 的子集 A^*，有 $\vDash(x^*\in\overline{A}^*)\leftrightarrow(\forall x)(x\in f^{-1})(x^*)\rightarrow x\in\overline{f^{-1}(A^*)})$

证明 对任何 $x\in f^{-1}(x^*)$，有

$$\overline{A}^*(x^*)=1-N^*_{x^*}(A^{*c})=1-N_x(f^{-1}(A^{*c}))=1-N_x((f^{-1}(A^*))^c)=\overline{f^{-1}(A^*)(x)}$$

所以有$\overline{A^*}(x^*)=\inf\limits_{x\in f^{-1}(x^*)}\overline{f^{-1}(A^*)(x)}$.

2.6 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群，H 是 G 的子群 $.G^*=G/H=\{Hx\mid x\in G\}$，$(G^*,\mathscr{T}^*)$是$(G,\mathscr{T})$的左陪集空间，则$\vDash T_3(G^*,\mathscr{T}^*)$

证明 要证$[T_3(G^*,\mathscr{T}^*)]=1$，只要证明对任何 x^*,A^*，$x^*\in A^*$有

$$\mathscr{T}^*(A^*)\leqslant \sup_{B^*\in\mathscr{R}(G^*)}\min(N^*_{x^*}(B^*),\ \inf_{y^*\in A^{*c}}N^*_{y^*}(B^{*c}))$$

事实上，若设$\mathscr{T}^*(A^*)>\lambda>0$，则对任何 $x\in f^{-1}(x^*)$，有

$$\sup_{BC^{-1}\in f^{-1}(A^*)}\min(N_x(B),N_e(C))\geqslant N_{xe^{-1}}(f^{-1}(A^*))=N_x(f^{-1}(A^*))\geqslant\mathscr{T}(f^{-1}(A^*))=\mathscr{T}^*(A^*)>\lambda.$$

因此存在 B_1、$C_1\in\mathscr{R}(G)$，使 $B_1C_1^{-1}\subseteq f^{-1}(A^*)$且 $N_x(B_1)>\lambda$，$N_e(C_1)>\lambda$ 我们把B_1^* 看成是所有形如 $Hx(x\in B_1)$的陪集所组成的集合，于是

$$f(HB_1)=B_1^*,f^{-1}(B_1^*)=HB_1,\text{因此}$$

$$N^*_{x^*}(B_1^*)=\sup_{x^*\in D^*\subseteq B_1^*}\mathscr{T}^*(D^*)=\sup_{x^*\in D^*\subseteq B^*}\mathscr{T}^*(f^{-1}(D^*))$$

$$=\sup_{Hx\subseteq HD\subseteq HB_1}\mathscr{T}(HD)\geqslant\sup_{x\in D\subseteq B_1}\mathscr{T}(D)=N_x(B_1)>\lambda.$$

同时，对任何 $y^*,A^*,y\in A^{*c}\subseteq B_1^{*c}$，有

$$N^*_{y^*}(B_1^{*c})=N^*_{y^*}((HB_1)^{*c})=N^*_{y^*}((HB_1)^{c^*})\geqslant N_y((HB_1)^c)$$

$$\geqslant N_e(y^{-1}(HB_1)^c)\geqslant N_e(c_1)>\lambda$$

其中我们用到关系式 $c_1\subseteq y^{-1}(HB_1)^c$，事实上，若 $c_1\not\subseteq y^{-1}(HB_1)^c$，则 $yc_1\not\subseteq(H,B_1)^c$ 即 $yc_1\cap HB_1\neq\varnothing$. 因此存在 $c\in C_1$，$n\in H$，$b\in B_1$，使 $yc=hb$，从而 $y=hbc^{-1}\in hB_1C_1^{-1}\subseteq hf^{-1}(A^*)=h\cdot HA=HA$，即 $y^*\in A^*$，这与 $y^*\in A^{*c}$. 矛盾 .

因此，

$$\sup_{B^*\in\mathscr{R}(G^*)}\min(N^*_{x^*}(B^*),\ \inf_{y^*\in A^{*c}}N^*_{y^*}(B^{*c}))\geqslant\min(N^*_{x^*}$$

(B_1^*), $\inf\limits_{y^* \in A^{*c}} N^*_{y^*}(B_1^{*c})) \geqslant \lambda$.

定理得证. □

2.7 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群, H 是 G 的正规子群, $G^* = G/H$, $(G^*, \mathscr{T}^*)$为$(G,\mathscr{T})$的不分明化商拓扑群, f 为 G 到 G^* 的自然映射, 则

$$\vDash H \in \mathscr{F} \leftrightarrow (\forall x^*)((x^* \in G^*) \rightarrow (x^* \in \mathscr{T}^*))$$

证明 $[(\forall x^*)((x^* \in G^*) \rightarrow (x^* \in \mathscr{T}^*))] = \inf\limits_{x^* \in G^*} \mathscr{T}^*$
$(\{x^*\})$
$= \inf\limits_{x^* \in G^*} \mathscr{T}^*(\{x^*\}^c) = \inf\limits_{x^* \in G^*} \mathscr{T}(f^{-1}(\{x^*\}^c)) = \inf\limits_{x^* \in G^*} \mathscr{T}((f^{-1}$
$(x^*))^c)$
$= \inf\limits_{x \in G} \mathscr{T}((Hx)^c) = \inf\limits_{x \in G} \mathscr{T}((H^c \cdot x)) = \mathscr{T}(H^c) = \mathscr{F}(H) = [H \in \mathscr{F}]$.
□

§3 同态与同构

3.1 **定义** 设 Ω 是一类不分明化拓扑群, 二元不分明谓词 $HM, HM_0, I \in \mathscr{F}(\Omega \times \Omega)$分别称为不分明同态, 不分明开同态和不分明同构, 定义为:

$$HM(G, G') := (\exists f)((f \in G'^G) \wedge \tau(f) \wedge c(f)$$

$$HM_0(G, G') := (\exists f)((f \in G'^G) \wedge \tau(f) \wedge (c(f) \text{A} o(f)))$$

$$HI(G_1 G') := (\exists f)((f \in G'^G) \wedge \sigma(f) \wedge (c(f) \text{A}(c(f^{-1})))$$

3.2 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$、$(G',\mathscr{T}')$是两个不分明化拓扑群, 对任何 $f \in G'^G$, 令

$$C_1(f) = (\forall u)(u \in N'_{e'} \rightarrow f^{-1}(u) \in N_e);$$

$$O_1(f) = (\forall v)(v \in N_e \rightarrow f(v) \in N'_{e'}).$$

则 (1) $\vDash c(f) \leftrightarrow \tau(f) \wedge c_1(f)$;

(2) $\vdash o(f) \leftrightarrow \tau(f) \wedge o_1(f)$.

证明 (1)我们只需证明当 $f: G \to G'$ 是一个同态时，有 $[c(f)] = [c_1(f)]$.

因为 $[c(f)] = \inf_{u \in \mathscr{P}(G')} \min(1, 1 - \mathscr{T}'(u) + \mathscr{T}(f^{-1}(u)))$

$$= \inf_{x \in G} \inf_{u \in \mathscr{P}(G')} \min(1, 1 - N'_{f(x)}(u) + N_x(f^{-1}(u)))$$

$$[C_1(f)] = \inf_{u \in \mathscr{P}(G')} \min(1, 1 - N'_{e'}(u) + N_e(f^{-1}(u)))$$

因此，若取 $x = e$，显然有 $[c(f)] \leqslant [c_1(f)]$. 下证 $[c(f) \geqslant [c_1(f)]$.

如果 $[c_1(f)] > \lambda$，则对任何 $u \in \mathscr{P}(G')$，有 $1 - N'_{e'}(u) + N_e(f^{-1}(u)) > \lambda$. 因对任何 $x' \in G'$, $x \in f^{-1}(x')$，有 $1 - N'_{e'}(u) + N_e(f^{-1}(u)) = 1 - N'_{x'}(x'u) + N_x(xf^{-1}(u)) > \lambda$. 因为 f 是同态，所以 $f^{-1}(x'u) = f^{-1}(x')f^{-1}(u) \supseteq xf^{-1}(u)$，从而

$N_x(f^{-1}(x'u)) \geqslant N_x(x \cdot f^{-1}(u))$，故

$1 - N'_{x'}(x'u) + N_x(f^{-1}(x'u)) \geqslant 1 - N'_{x'}(x'u) + N_x(xf^{-1}(u)) > \lambda$

令 $x'u = u_0$，则 $1 - N'_{x'}(u_0) + N_x(f^{-1}(u_0)) > \lambda$

因为 G' 是群，故当 u 取遍 $\mathscr{P}(G')$ 时，u_0 也取遍 $\mathscr{P}(G')$，因此

$$[c(f)] = \inf_{x \in G} \inf_{u \in \mathscr{P}(G')} \min(1, 1 - N'_{x'}(u) + N_x(f^{-1}(u))) \geqslant \lambda.$$

□

3.3 **定理** 设 $(G, \mathscr{T})$ 是不分明化拓扑群，N 是 G 的正规子群，$G^* = G/N$，则

$\vdash HM_0(G, G^*)$

证明 因为

$[HM_0(G, G^*)] = [(\exists f)((f \in G^{*G}) \wedge \tau(f) \wedge (c(f) \wedge 0(f)))]$

$$= \sup_{\substack{f \in G^{*G} \\ \tau(f)}} max(0, \inf_{A^* \in \mathscr{P}(G^*)} \min(1, 1 - \mathscr{T}^*(A^*) + \mathscr{T}(f^{-1}(A^*)))$$

$+\inf_{B\in\mathscr{P}(G)}\min(1,1-\mathscr{T}(B)+\mathscr{T}^*(f(B)))-1)$

注意到$(G^*,\mathscr{T}^*)$是$(G,\mathscr{T})$的商群，因此存在自然同态$f:G\to G^*$，使得对任何A^*，$\mathscr{T}^*(A^*)=\mathscr{T}(f^{-1}(A^*))$以及对任何的$B$，$\mathscr{T}^*(f(B))=\mathscr{T}(f^{-1}(f(B)))=\mathscr{T}(f^{-1}(B^*))=\mathscr{T}(NB)\geqslant\mathscr{T}(B)$. 因此

$$\inf_{A^*\in\mathscr{P}(G^*)}\min(1,1-\mathscr{T}^*(A^*)+\mathscr{T}(f^{-1}(A^*))=1$$

$$\inf_{B\in\mathscr{P}(G)}\min(1,1-\mathscr{T}(B)+\mathscr{T}^*(f(B)))=1$$

从而$[HM_0(G,G^*)]=1$. □

3.4 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$，$(G',\mathscr{T}')$是两个不分明化拓扑群，则

$\vdash HM_0(G,G')\to(\exists N)((N\triangleleft G)\to HI(G',G/N))$.

证明 $[(\exists N)((N\triangleleft G)\to HI(G',G/N))]=\sup_{N\triangleleft G}[HI(G',G/N)]$

$$=\sup_{N\triangleleft G}\sup_{\sigma(f)}max(0,[c(f)]+[0(f^{-1}]-1)$$

如果$[HM_0(G,G')]=\sup_{\tau(f)}max(0,[c(f)]+[0(f)]-1)>\lambda$，则存在同态$f:G\to G'$，使得$[c(f)]+[0(f)]-1>\lambda$. 即$\inf_{A\in\mathscr{P}(G')}\min(1,1-\mathscr{T}'(A)+\mathscr{T}(f^{-1}(A)))+\inf_{B\in\mathscr{P}(G)}\min(1,1-\mathscr{T}(B)+\mathscr{T}'(f(B)))-1>\lambda$ 令$\inf_{A\in\mathscr{P}(G')}\min(1,1-\mathscr{T}'(A)+\mathscr{T}(f^{-1}(A')))=\alpha>\alpha-\varepsilon_1$，$\varepsilon_1$为任意正数，则对任何$A\in\mathscr{P}(G')$，有$1-\mathscr{T}'(A)+\mathscr{T}(f^{-1}(A))>\alpha-\varepsilon_1$，令$\inf_{B\in\mathscr{P}(G)}\min(1,1-\mathscr{T}(B)+\mathscr{T}'(f(B)))=\beta>\beta-\varepsilon_2$，$\varepsilon_2$为任意正数，则对任何$B\in\mathscr{P}(G)$，有$1-\mathscr{T}(B)+\mathscr{T}'(f(B)))>\beta-\varepsilon_2$.

因为$f:G\to G'$是同态，设$K_{er}f=N$，则N是G的正规子群，令$h:G\to G/N=G^*$是自然同态，$\mathscr{T}^*$是由$\mathscr{T}$在G^*中所诱导出的商拓扑，则$\mathscr{T}^*(A^*)=\mathscr{T}(h^{-1}(A^*))$，对任何$A^*\in\mathscr{P}(G^*)$成立．由群论中的同构定理知，存在同构映射$g:G'\to G^*$，使得$h=g\circ f$. 因此对于$g\in\sigma$，$N<G$以及对于$A^*\in\mathscr{P}(G^*)$，我们有

$1-\mathcal{T}^*(A^*)+\mathcal{T}'(g^{-1}(A^*))=1-\mathcal{T}(h^{-1}(A^*))+\mathcal{T}'(f(h^{-1})(A^*))>\beta-\varepsilon_2$.

所以$[c(g)]=\inf_{A^*\in\mathcal{P}(G^*)}\min(1,1-\mathcal{T}^*(A^*)+\mathcal{T}'(g^{-1}(A^*))\geqslant\beta-\varepsilon_2$.

由于 ε_2 的任意性，所以$[c(g)]\geqslant\beta$. 另一方面，对任何 $A\in\mathcal{P}(G')$ 我们有

$$1-\mathcal{T}'(A)+\mathcal{T}^*(g(A))=1-\mathcal{T}'(A)+\mathcal{T}(h^{-1}(g(A)))$$
$$=1-\mathcal{T}'(A)+\mathcal{T}(f^{-1}(A))>\alpha-\varepsilon_1$$

所以$[c(g^{-1})]=\inf_{A\in\mathcal{P}(G')}\min(1,1-\mathcal{T}'(A)+\mathcal{T}^*(g(A)))\geqslant\alpha-\varepsilon_1$.

由于 ε_1 的任意性，所以$(c(g^{-1})]\geqslant\alpha$. 因此

$$[c(g)]+[c(g^{-1})]-1\geqslant\alpha+\beta-1>\lambda$$

从而$\sup_{N\triangleleft G}\sup_{f\in\sigma}max(0,[c(f)]+[c(f^{-1})]-1)>\lambda$. □

§4 不分明化拓扑群的积

4.1 **定理** 设$\{(G_a,\mathcal{T}_a):a\in A\}$是一族不分明化拓扑群，则$(\times_{a\in A}G_a,\times_{a\in A}\mathcal{T}_a)$也是一个不分明化拓扑群 .

证明 只需证明对任何 $x,y\in\underset{a\in A}{\times}G_a$ 和 $u\in\mathcal{P}(\underset{a\in A}{\times}G_G)$, 有 $N_{xy^{-1}}(u)\leqslant\sup_{BC^{-1}\subseteq u}(N_x(B)、N_y(C))$. 由第二章 1.1 定义，对任何 $x\in\underset{a\in A}{\times}G_a$ 和$u\in\mathcal{P}(\underset{a\in A}{\times}G_a)$, 有

$N_x(u)=\sup_{x\in v\subseteq u}\sup_{\substack{\mathcal{A}\subseteq\varphi\\ \cap A=V}}\inf_{a\in A(\mathcal{A})}\mathcal{T}_a(V)$, 其中 $\mathcal{A}=\{p_a^{-1}(V_a)|a\in A(\mathcal{A})\}$. $A(\mathcal{A})$为 $\mathcal{A}$ 中所有元素的下标集 .

现令 $N_{xy^{-1}}(u)>\lambda$. 则存在 $V\in\mathcal{P}(\underset{a\in A}{\times}G_a)$和 $\mathcal{A}\subseteq\varphi$, 使得 $xy^{-1}\in V\subseteq u$, $\cap\mathcal{A}=V$, 而且对任何 $a\in A(\mathcal{A})$, $\mathcal{T}_a(V)>\lambda$, 由于 $\mathcal{A}$ 的

有限性，我们可假设$\bigcap\mathscr{A}=P_1^{-1}(V_1)\cap P_2^{-1}(V_2)\cap\cdots\cap P_k^{-1}(V_k)$. 因此$xy^{-1}\in P_1^{-1}(V_1)\cap\cdots\cap P_k^{-1}(V_k)$，且对任何$i\in\{1,2,\cdots,k\}$，有$\mathscr{T}_i(V_i)>\lambda$. 因为$xy^{-1}\in V\subseteq u$，所以对任何$i\in\{1,2,\cdots,k\}$，有$x_iy_i^{-1}\in V_i\subseteq u_i$，其中$u_i\in P_i(u)$. 因此

$$\sup_{x_iy_i^{-1}\in V_i\subseteq u_i}\mathscr{T}_i(V_i)>\lambda,\ N_{x_iy_i^{-1}}(u_i)>\lambda$$

因为对任何$a\in A$，$(G_a,\mathscr{T}_a)$是不分明化拓扑群，所以对任何$i\in\{1,2,\cdots,k\}$存在B_i,C_i，使得$x_i\in B_i$，$y_i\in c_i$，$B_iC_i^{-1}\subseteq u_i$，而且$N_{x_i}(B_i)>\lambda$，$N_{y_i}(C_i)>\lambda$，从而又存在B'_i,C'_i，使得$x_i\in B'_i\subseteq B_i$，$y_i\in C'_i\subseteq C_i$，而且$\mathscr{T}_i(B'_i)>\lambda$，$\mathscr{T}_i(c'_i)>\lambda$.

令$\mathscr{A}^{(1)}=\{P_i^{-1}(B'_i)\mid i=1,2,\cdots,k\}$，$\mathscr{A}^{(2)}=\{P_i^{-1}(C'_i)\mid i=1,2,\cdots,k\}$，$B'=\bigcap\mathscr{A}^{(1)}$，$C'=\bigcap\mathscr{A}^{(2)}$，$B=P_1^{-1}(B_1)\cap P_2^{-1}(B_2)\cap\cdots\cap P_k^{-1}(B_k)$，$C=P_1^{-1}(C_1)\cap P_2^{-1}(C_2)\cap\cdots\cap P_k^{-1}(C_k)$. 因此

$$N_x(B)=\sup_{x\in B'\subseteq B}\ \sup_{\substack{\mathscr{A}^{(1)}\subseteq\varphi\\ \bigcap\mathscr{A}^{(1)}=B'}}\ \inf_{1\leqslant i\leqslant k}\mathscr{T}_i(B'_i)>\lambda.$$

$$N_y(C)=\sup_{y\in C'\subseteq C}\ \sup_{\substack{\mathscr{A}^{(2)}\subseteq\varphi\\ \bigcap\mathscr{A}^{(2)}=C'}}\ \inf_{1\leqslant i\leqslant k}\mathscr{T}_i(C'_i)>\lambda.$$

由于$BC^{-1}=P_1^{-1}(B_1C_1^{-1})\cap\cdots\cap P_k^{-1}(B_kC_k^{-1})\subseteq P_1^{-1}(u_1)\cap\cdots\cap P_k^{-1}(u_k)\subseteq u$，因此$\sup\limits_{BC^{-1}\subseteq u}\min(N_x(B).N_y(C))>\lambda$. □

4.2 **定理** 设$\{(G_a,\mathscr{T}_a):a\in A\}$是一簇不分明化拓扑群，对任何$a\in A$，设$N_a\lhd G_a$，$(G_a/N_a,\mathscr{T}_a^*)$是$(G_a,\mathscr{T}_a)$的商群，则

$$\vdash HI(\bigtimes_{a\in A}G_a/\bigtimes_{a\in A}N_a,\ \bigtimes_{a\in A}(G_a/N_a)).$$

证明 因为$N_a\lhd G_a$，所以$\bigtimes_{a\in A}N_a\lhd\bigtimes_{a\in A}G_a$，对任何$a\in A$，设自然同态

$$\varphi_a:G_a\to G_a/N_a\quad(x_a\to x'_a),$$

$$\varphi:\bigtimes_{a\in A}G_a\to\bigtimes_{a\in A}G_0/\bigtimes_{a\in A}N_a\quad(\bigtimes_{a\in A}x_a\to(\bigtimes_{a\in A}x_a)^*)$$

则容易证明 $f_0: \bigtimes_{a\in A} G_a / \bigtimes_{a\in A} N_a \to \bigtimes_{a\in A}(G_0/N_a)$

$$((\bigtimes_{a\in A} x_a)^* \to \bigtimes_{a\in A} x_a^*)$$

是一个同构映射，而且满足 $f_0 \circ \varphi = \bigtimes_{a\in A}\varphi_a$. 因为

$$[HI(\bigtimes_{a\in A} G_a / \bigtimes_{a\in A} N_a, \bigtimes_{a\in A}(G_a/N_a))]$$

$$= \sup_{f\in\sigma} max(0, [c(f)] + [c(f^{-1})] - 1)$$

我们取 $f_0 \in \sigma$, 则下证 $[c(f_0)] = [c(f_0^{-1})] = 1$.

事实上

$$[c(f)] = \sup_{u\in\mathscr{A}(\bigtimes_{a\in A}(G_a/N_a))} \min(1, 1 - (\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a^*)(u) + (\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)^*$$

$$(f^{-1}(u)))$$

$$(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a^*)(u) = \sup_{\cup_{\lambda\in\Lambda} u(A) = u} \inf_{\lambda\in\Lambda} \sup_{\substack{\mathscr{A}^{(\lambda)}\subseteq\varphi(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a^*) \\ \cup\mathscr{A}^{(\lambda)} = u^{(\lambda)}}} \inf_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})} \mathscr{T}_a^*$$

$$(V_a^{\lambda *}),$$

其中 $\mathscr{A}^{(\lambda)} = \{P^{-1}(V_a^{\lambda *}) \mid a \in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})\}$. $(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)^*(f^{-1}(u)) =$
$(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)(\varphi^{-1}(f^{-1}(u))) = (\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)(\bigtimes_{a\in A}\varphi_a)^{-1}(u) = (\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)$
$(\bigtimes_{a\in A}\varphi_a^{-1}(u_a^*))$

其中 $u = \bigtimes_{a\in A} u_a^*$，所以

$$(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)^*(f^{-1}(u)) = \sup_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B^{(\lambda)} = \bigtimes_{a\in A}\varphi_a^{-1}(u_a^*)} \inf_{\lambda\in\Lambda} \sup_{\substack{\mathscr{D}^{(\lambda)}\subseteq\varphi(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a) \\ \cap\mathscr{D}^{(\lambda)} = B^{(\lambda)}}} \inf_{a\in A(\mathscr{D}^{(\lambda)})}$$

$$\mathscr{T}_a(D_a^{(\lambda)})$$

其中 $\mathscr{D}^{(\lambda)} = \{P_a^{-1}(D_a^{\lambda}) \mid a \in A(\mathscr{D}^{(\lambda)})\}$. 现要证明

$$(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)^*(f^{-1}(\lambda)) \geqslant (\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a^*)(u)$$

如果 $(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a^*)(u) > \mu$, 则存在 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}(\bigtimes_{a\in A}(G_a/N_a))$, $\mathscr{B} = \{B^{(\lambda)} \mid \lambda \in \Lambda\}$, 且对每一个 $\lambda \in \Lambda$, 存在 $\mathscr{A}^{(\lambda)} \subseteq \varphi(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a^*)$, $\mathscr{A}^{(\lambda)} = \{P_a^{\lambda -1}(v_a^{i *}) \mid a \in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})\}$, 使得 $\cup\mathscr{B} = u$, $\cap\mathscr{A}^{(\lambda)} = B^{(\lambda)}$ 以及 $\inf_{\lambda\in\Lambda} \inf_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})} \mathscr{T}_a^*$

$(V_a^{\lambda *})>\mu$，即对任何 $\lambda\in\Lambda$ 和 $a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})$ 有 $\mathscr{T}_a(\varphi_a^{-1}(V_a^{\lambda *}))>\mu$. 令 $\varphi_a^{-1}(V_a^{(\lambda)*})=D_a^{(\lambda)}\in\mathscr{P}(G_a)$，则 $P_a^{-1}(D_a^{(\lambda)})\in\varphi(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)$，再令 $\mathscr{D}^{(\lambda)}=\{P_a^{-1}(\mathscr{D}_a^{(\lambda)})\mid a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})\}$，则 $A(\mathscr{D}^{(\lambda)})=A(\mathscr{A}^{(\lambda)})$，从而 $\mathscr{D}^{(\lambda)}\subseteq\varphi(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)$，而且 $\bigcap\mathscr{D}^{(\lambda)}=\bigcap_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}P_a^{-1}(D_a^{(\lambda)})=\bigcap_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}P_a^{-1}(\varphi_a^{-1}(V_a^{\lambda *}))$. 因为

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}P_a^{-1}(V_a^{\lambda *})=u=\bigtimes_{a\in A}u_a^*$，所以 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}((\bigtimes_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})^*}V_a^{\lambda *})\cdot(\bigtimes_{a\in A(\mathscr{A}^*)}G_a^*))=\bigtimes_{a\in A}u_a^*$. 用 $(\bigtimes_{a\in A}\varphi_a)^{-1}$ 作用上式的两边，得 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}((\bigtimes_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}\varphi_a^{-1}(V_a^{\lambda *}))(\bigtimes_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}G_a)=\bigtimes_{a\in A}\varphi_a^{-1}(u_a^*)$，即 $\bigcup_{\lambda\in x}$ $\bigcap_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}p_a^{-1}(\mathscr{S}_a^{-1}(v_a^*))=\bigtimes_{a\in A}(u_a^*)$

因此 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}\mathscr{D}^{\lambda}=\bigtimes_{a\in A}\varphi_a^{-1}(u_a^*)$. 令 $\bigcap_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}\mathscr{D}^{(\lambda)}=B^{(\lambda)}$，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B^{(\lambda)}=\bigtimes_{a\in A}\varphi_a^{-1}(u_a^*)$. 所以 $(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)^*(f^{-1}(u))=\sup_{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B^{(\lambda)}=\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a^{-1}(u_a^{\lambda})}$

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}\sup_{\substack{\mathscr{D}^{(\lambda)}\subseteq\varphi(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)\\ \bigcap\mathscr{D}^{(\lambda)}=B^{(\lambda)}}}\inf_{\lambda\in A(\mathscr{D}^{(\lambda)})}\mathscr{T}_a(D_a^{(\lambda)})\geqslant\inf_{\lambda\in\Lambda}\inf_{a\in A(\mathscr{A}^{(\lambda)})}\mathscr{T}_a(\varphi_a^{-1}(V_a^{\lambda *}))$$

$\geqslant\mu$.

故 $[c(f)]=1$，同理可证 $[c(f^{-1})]=1$，从而定理得证. □

4.3 **定理** 设 $(G_a,\mathscr{T}_a)$，$a\in A$，$(G,\mathscr{T})$ 都是不分明化拓扑群，则

$$\models HM(G,\bigtimes_{a\in A}G_a)\leftrightarrow\forall a(a\in A\rightarrow HM(G,G_a))$$

证明 本定理只需证明

$$\sup_{f\in\tau(G,\bigtimes_{a\in A}G_a)}[c(f)]=\inf_{a\in A}\sup_{g_a\in\tau(G,G_a)}[c(g_a)]$$

若 $\sup_{f\in\tau(G,\bigtimes_{a\in A}G_a)}[c(f)]>\lambda$，则存在 G 到 $\bigtimes_{a\in A}G_a$ 上的同态 f，使得 $[c(f)]>\lambda$，因此对任意的 $u\in\mathscr{P}(\bigtimes_{a\in A},G_a)$，有 $1-(\bigtimes_{a\in A}\mathscr{T}_a)(u)+\mathscr{T}$

$(f^{-1}(u))>\lambda$. 令 $g_a=P_a\circ f(a\in A)$, 易证 g_a 是 G 到 G_a 的同态映射, 而且对任意 $V_a\in\mathscr{R}(G_a)$, 令 $V=P_a^{-1}(V_a)\in\mathscr{R}(\underset{a\in A}{\times}G_a)$, 有

$$\mathscr{T}(g_a^{-1}(V_a))=\mathscr{T}(f^{-1}(P_a^{-1}(V_a)))=\mathscr{T}(f^{-1}(V)).$$

因此对任意 $a\in A$, $(\underset{a\in A}{\times}\mathscr{T}_a)(V)=(\underset{a\in A}{\times}\mathscr{T}_a)(P_a^{-1}(V_a))\geqslant\mathscr{T}_a(V_a)$ 从而有 $1-\mathscr{T}_a(V_a)+\mathscr{T}(g^{-1}(V_a))\geqslant 1-(\underset{a\in A}{\times}\mathscr{T}_a)(V)+\mathscr{T}[f^{-1}(V))>\lambda$ 即对任何 $a\in A$. 有 $\sup\limits_{g_a\in\tau(G,G_a)}[c(g_a)]>\lambda$, 且

$$\inf_{a\in A}\sup_{g_a\in\tau(G,G_a)}[c(g_a)]\geqslant\lambda.$$

反之, 若 $\inf\limits_{a\in A}\sup\limits_{g_a\in\tau(G,G_a)}[c(g_a)]>\lambda$, 则对任何 $a\in A$, 存在 G 到 G_a 上的同态 g_a, 使得

$$\inf_{u_a\in\mathscr{R}(G_a)}\min(1,1-\mathscr{T}_a(u_a)+\mathscr{T}(g_a^{-1}(u_a)))>\lambda$$

因此, 对任何 $u_a\in\mathscr{R}(G_a)$, $1-\mathscr{T}_a(u_a)+\mathscr{T}(g_a^{-1}(u_a))>\lambda$, 即 $\mathscr{T}_a(u_a)<1+\mathscr{T}(g_a^{-1}(u_a))-\lambda$　　(1)

容易证明 $f:G\to\underset{a\in A}{\times}G_a(x\to\underset{a\in A}{\times}g_a(x))$ 是 G 到 $\underset{a\in A}{\times}G_a$ 上的一个同态, 而且对任何 $a\in A$, $P_a\circ f=g_a$, 因为对任何 $u=\underset{a\in A}{\times}u_a\in\mathscr{P}(\underset{a\in A}{\times}G_a)$, 有 $P_a(\underset{a\in A}{X}u_a)=u_a\in\mathscr{P}(G_a)(a\in A)$, 所以 $g_a^{-1}(u_a)=g^{-1}(P_a(\underset{a\in A}{\times}u_a))=f^{-1}(\underset{a\in A}{\times}f^{-1}(u))$. 因此 $\mathscr{T}(f^{-1}(u))=\mathscr{T}(g_a^{-1}(u_a))$. 再由不等式(1)我们有

$$\mathscr{T}_a(u_a)<1+\mathscr{T}(g_a^{-1}(u_a))-\lambda=1+\mathscr{T}(f^{-1}(u))-\lambda$$

现在对任何 $u\in\mathscr{R}(\underset{a\in A}{\times}G_a)$, 令 $\mathscr{B}=\{B^{(\lambda)}\mid B^{(\lambda)}\in\mathscr{R}(\underset{a\in A}{\times}G_a),\lambda\in\Lambda\}$ 使得 $\cup\mathscr{B}=u$, 而且对任何 $B^{(\lambda)}$, 令 $\mathscr{A}^{(\lambda)}\subseteq\varphi(\underset{a\in A}{\times}\mathscr{T}_a)$, $\mathscr{A}^{(\lambda)}=\{P_b^{-1}(u_b^{(\lambda)})\mid b\in B\subseteq A\}$, 使得 $\mathscr{A}^{(\lambda)}=B^{(\lambda)}$, 我们取

$$u_a^{(\lambda)}=\begin{cases}u_b^{(\lambda)}, & a=b\in B\\ e_a, & a\notin B\end{cases}$$

则 $\bigcap\limits_{a\in A}P_a^{-1}(u_a^{(\lambda)})=\bigcap\limits_{b\in B}P_b^{-1}(u_b^{(\lambda)})$. 再注意到 $\underset{a\in A}{X}u_a=\bigcap\limits_{a\in A}P_a^{-1}(u_a)$,

所以$(\underset{a\in A}{\times}\mathscr{T}_a)(u)=\sup\limits_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B^{(\lambda)}=u}\inf\limits_{\lambda\in\Lambda}\sup\limits_{\bigcap\limits_{b\in B}P_b^{-1}(u_b^{(\lambda)})=B^{(\lambda)}}\inf\limits_{b\in B}\mathscr{T}_b(u_b^{(\lambda)})$

$$\leqslant \sup_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B^{(\lambda)}=u}\inf_{\lambda\in\Lambda}(1+\mathscr{T}(f^{-1}(\underset{a\in A}{\times}u_a^{(\lambda)}))-\lambda)$$

$$=\sup_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B^{(\lambda)}=u}\inf_{\lambda\in\Lambda}(1+\mathscr{T}(f^{-1}(\bigcap_{a\in A}P_a^{-1}(u_a^{(\lambda)}))-\lambda)$$

$$=\sup_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B^{(\lambda)}=u}\inf_{\lambda\in\Lambda}(1+\mathscr{T}(f^{-1}(B^{(\lambda)})-\lambda)$$

$$\leqslant 1+\sup_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B^{(\lambda)}=u}\mathscr{T}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B^{(\lambda)}))-\lambda$$

$$\leqslant 1+\sup_{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B^{(\lambda)}=u}\mathscr{T}(f^{-1}(u))-\lambda$$

$$=1+\mathscr{T}(f^{-1}(u))-\lambda$$

因此,对任何 $u\in\mathscr{P}(\underset{a\in A}{\times}G_a)$,有 $1-(\underset{a\in A}{\times}\mathscr{T}_a)(u)+\mathscr{T}(f^{-1}(u))\geqslant\lambda$,

从而,$\inf\limits_{u\in\mathscr{P}(\underset{a\in A}{\times}G_a)}\min(1,1-(\underset{a\in A}{\times}\mathscr{T}_a)(u)+\mathscr{T}(f^{-1}(u)))\geqslant\lambda$.

即 $\sup\limits_{f\in\tau(G,\underset{a\in A}{\times}G_a)}[c(f)]\geqslant\lambda$. 证毕 □

§5 连通群

5.1 **引理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群,则对任何 $A\in\mathscr{P}(G)$,有

$\vDash I(A)\leftrightarrow I(A^{-1})$, $\vDash I(A)\leftrightarrow I(xA)$.

证明 由本章 1.3 定理立即得到 .

5.2 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群,$e\in G$ 是单位元,则

$\vDash k_e(N)\rightarrow\forall x((x\in G)\wedge(xNx^{-1}\subset N))$

证明 如果;$[k_e(N)]>\lambda$,即

$[I(N)]+\inf\limits_{e\in B}[I(B)\rightarrow B\subseteq N]-1>\lambda$.

则对任何 $x\in G$,有 $e\in xNx^{-1}$,且

$[I(N)]+[I(xNx^{-1})\to(xNx^{-1}\subseteq N)]-1>\lambda$,

因此,$[I(N)]+1-[I(xNx^{-1})]+[xNx^{-1}\subseteq N]-1>\lambda$.

由 5.1 引理知,$[I(xNx^{-1}]=[I(N)]$,所以

$[xNx^{-1}\subseteq N]>\lambda$,从而$\inf_{x\in G}[xNx^{-1}\subseteq N]\geqslant\lambda$. □

此定理说明单位元的连通区是 G 的正规子群.

5.3 **引理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群,$A\in\mathscr{P}(G)$,则

$\vDash k_x(A)\leftrightarrow kx^{-1}(A^{-1})$, $\vDash k_x(A)\leftrightarrow k_e(x^{-1}A)$

证明 由 5.1 引理知

$$[k_x(A)]=max(0,[I(A)]+\inf_{x\in B}[I(B)\to B\subseteq A]-1)$$

$$=max(0,[I(A^{-1})]+\inf_{x^{-1}\in B^{-1}}[I(B^{-1})\to B^{-1}\subseteq A^{-1}]-1)$$

$$=[x_{x^{-1}}(A^{-1})]$$

同理可证$[k_x(A)]=[k_e(x^{-1}A)]$. □

5.4 **引理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群,$G^*=G/N$,$(G^*,\mathscr{T}^*)$是$(G,\mathscr{T})$的商群.$f:G\to G^*$是自然同态,$A^*\subseteq G^*$,则

$\vDash I(f^{-1}(A^*))\to I(A^*)$

证明 首先证明对任何 $E^*\subseteq A^*$,有 $\mathscr{T}^*|_{A^*}(E^*)=\mathscr{T}|_{f^{-1}(A^*)}(f^{-1}(E^*))$.事实上

$$\mathscr{T}|_{f^{-1}(A^*)}(f^{-1}(E^*))=\sup_{H\cap f^{-1}(A^*)=f^{-1}(E^*)}\mathscr{T}(H)\geqslant\sup_{f^{-1}(H^*)\cap f^{-1}(A^*)=f^{-1}(E^*)}\mathscr{T}(f^{-1}(H^*))=\sup_{H^*\cap A^*=E^*}\mathscr{T}^*(H^*)=\mathscr{T}^*|_{A^*}(E^*)$$

反之 $\mathscr{T}|_{f^{-1}(A^*)}(f^{-1}(E^*))=\sup_{H\cap f^{-1}(A^*)=f^{-1}(E^*)}\mathscr{T}(H)\leqslant\sup_{H^*\cap A^*=E^*}\mathscr{T}(HN)$

$$=\sup_{H^*\cap A^*=E^*}\mathscr{T}(f^{-1}(H^*))=\mathscr{T}^*|_{A^*}(E^*).$$ 因此

$$[I(A^*)]=1-\sup_{\substack{E^*\cup F^*=A^*,E^*\cap F^*=\varnothing\\E^*,F^*\neq\varnothing}}\min(\mathscr{T}^*|_{A^*}(E^*),\mathscr{T}^*|_{A^*}$$

$(F^*))$

$$=1-\sup_{\substack{f^{-1}(E^*)\cup f^{-1}(F^*)=f^{-1}(A^*)\\ f^{-1}(E^*)\cap f^{-1}(F^*)\neq\varnothing}}\min(\mathscr{T}|_{f^{-1}(A^*)}(f^{-1}(E^*)),\mathscr{T}|_{f^{-1}(A^*)}(f^{-1}(F^*)))$$

$$=1-\sup_{\substack{E\cup F=f^{-1}(A^*)\\ E\cap F\neq\varnothing}}\min(\mathscr{T}|_{f^{-1}(A^*)}(E),\mathscr{T}|_{f^{-1}(A^*)}(F))=[I(f^{-1}(A^*))].\quad\square$$

5.5 **定义** 设 Σ 是不分明化拓扑空间类，一元不分明谓词 $\bar{k}\in\mathscr{P}(\Sigma)$ 称为是不分明完全不连通的，如果：$\bar{k}(X,\mathscr{T}):=\forall x\forall A((x\in X)\wedge(A\in\mathscr{P}(X))\wedge k_x(A)\to A\equiv\{x\})$.

5.6 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群，则

$$\vDash\bar{k}(G)\leftrightarrow\forall A((A\in\mathscr{P}(X))\wedge k_e(A)\to A\equiv\{e\})$$

证明 由 5.3 引理对任何 $A\in\mathscr{P}(G)$，$x\in G$，有

$[k_e(A)\to A\equiv\{e\}]=[k_x(xA)\to xA\equiv\{x\}]=\inf\limits_{x\in G}[k_x(xA)\to xA\equiv\{x\}]$ 因此 $\inf\limits_{A\in\mathscr{P}(G)}[k_e(A)\to A\equiv\{e\}]=\inf\limits_{A\in\mathscr{P}(G)}\inf\limits_{x\in G}[k_x(xA)\to xA\equiv\{x\}]$. 令 $xA=B$. 则当 A 取遍 $\mathscr{P}(G)$ 时，B 也取遍 $\mathscr{P}(G)$，因而 $\inf\limits_{A\in\mathscr{P}(G)}[k_e(A)\to A\equiv\{e\}]=\inf\limits_{B\in\mathscr{P}(G)}\inf\limits_{x\in G}[k_x(B)\to B\equiv\{x\}]=[\bar{k}(G)]$. $\square$

5.7 **定理** 设$(G,\mathscr{T})$是不分明化拓扑群，$N\lhd G$，$G^*=G/N$，则

$$\vDash k_e(N)\to\bar{k}(G^*,\mathscr{T}^*)$$

证明 利用公式$(a\otimes(b\propto 0))\propto 0\geqslant a\propto b\geqslant b\otimes(a\propto 0)$和 5.4 引理，有

$$[\bar{k}(G^*,\mathscr{T}^*)]=\inf_{A^*\in\mathscr{P}(G^*)}([k_e(A^*)\propto[A^*\equiv\{e^*\}])$$

$$=\inf_{A^*\neq\{e^*\}}([k_e(A^*)]\propto 0)$$

$$=\inf_{A^*\neq\{e^*\}}(([I(A^*)]\otimes(\inf_{e^*\in B^*}([I(B^*)\propto[B^*$$

$$
\begin{aligned}
&\subseteq A^{*}]))\propto 0) \\
&= \inf_{A^{*}\neq\{e^{*}\}}(([I(A^{*})]\otimes(\sup_{e^{*}\in B^{*}\nsubseteq A^{*}}[I(B^{*})]\propto \\
&0))\propto 0) \\
&\qquad \geqslant \inf_{A^{*}\neq\{e^{*}\}}([I(A^{*})]\propto\sup_{e^{*}\in B^{*}\nsubseteq A^{*}}[I(B^{*})])
\end{aligned}
$$

取 $B^{*}=\{e^{*}\}\geqslant \inf\limits_{e^{*}\in A^{*}\neq\{e^{*}\}}([I(f^{-1}(A^{*}))]\propto[I(\{e^{*}\})])$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \inf_{e^{*}\in A^{*}\neq\{e^{*}\}}([I(f^{-1}(A^{*}))]\propto[I(N)]) \\
&\geqslant \inf_{e^{*}\in A^{*}\neq\{e^{*}\}}([I(N)]\otimes([I(f^{-1}(A^{*}))]\propto 0)) \\
&\geqslant [I(N)]\otimes\inf_{e\in B}([I(B)]\propto[B\subseteq N]) \\
&= [k_{e}(N)]. \quad \square
\end{aligned}
$$

附　录　不分明化群

1971 年 A.Rosenfeld 首先引入了不分明子群的概念，从而不分明代数结构得到了很大的发展，不分明化理论除了应用于拓扑空间外，还介入代数理论。沈继忠先生给出不分明化群的概念，从一个新的方向发展了不分明代数结构。这项工作刚刚开始。为了使读者能更好地了解不分明化理论，我们给出此篇附录。

$\mathscr{F}(G)$总表示 G 的不分明幂集，其中 G 是任意一个群。

§1　不分明化群

1.1 **定义**　设 G 是一个群，$A\in\mathscr{F}(G)$。令

$$g_1(A):=(\forall x)(\forall y)((x\in A)\wedge (y\in A)\to(xy\in A));$$

$$g_2(A):=(\forall x)((x\in A)\to(x^{-1}\in A))$$

一元不分明谓词 g、$sg\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(G))$分别称为不分明化子群和强不分明化子群，定义为

$$g(A):=g_1(A)\wedge g_2(A);$$

$$sg(A):=g_1(A)\mathbin{\dot\wedge} g_2(A)$$

1.2 **定理**　对任意 $A\in\mathscr{F}(G)$,

$$\models(A\equiv A^{-1})\to(g(A)\leftrightarrow g_3(A))$$

其中 $x\in A^{-1}:=x^{-1}\in A$，且 $g_2(A):=(\forall x)(\forall y)((x\in A)\wedge (g\in A)\to(xy^{-1}\in A))$

证
$$[g_3(A)\to g_2(A)]$$
$$=\min(1.1-[g_3(A)]+[g_2(A)])$$

$$
\begin{aligned}
&= \min(1.1 - \inf_{x,y\in G}\min(1.1 - \min(A(x), A(y) + A(xy^{-1}))\\
&\qquad + \inf_{x\in G}\min(1.1 - A(x) + A(x^{-1})))\\
&\geqslant \min(1.1 - \inf_{x\in G}\min(1.1 - \min(A(x), A(e)) + A(x))\\
&\qquad + \inf_{x\in G}\min(1.1 - A(x) + A(x^{-1}))\\
&= \inf_{x\in G}\min(1.1 - A(x) + A^{-1}(x))\\
&= [A \subseteq A^{-1}] \geqslant [A \equiv A^{-1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[g_3(A) \to g_1(A)]\\
&= \min(1.1 - [g_3(A)] + [g_1(A)])\\
&= \min(1.1 - \inf_{x\cdot y\in G}\min(1.1 - \min(1.1 - \min(A(x).A(y)) +\\
&\quad A(xy^{-1})) + \inf_{x\cdot y\in G}\min(1.1 - \min(A(x).A(y)) + A(xy)))\\
&= \min(1.1 - \inf_{x\cdot y\in G}\min(1.1 - \min(A(x).A(y^{-1})) + A(xy))\\
&\quad + \inf_{x\cdot y\in G}\min(1.1 - \min(A(x).A(y) + A(xy)))\\
&\geqslant \inf_{x\cdot y\in G}\min(1.1 - A(y^{-1}) + A(y))\\
&= \inf_{y\in G}\min(1.1 - A^{-1}(y) + A(y))\\
&= [A^{-1} \subseteq A] \geqslant [A \equiv A^{-1}]
\end{aligned}
$$

因此，$[g_3(A) \to g_1(A) \wedge g_2(A)] = \min([g_3(A) \to g_1(A)].[g_3(A) \to g_2(A)]) \geqslant [A \equiv A^{-1}]$；

反之，同上所证，可得$[g_1(A) \wedge g_2(A) \to g_3(A)] \geqslant [g_1(A) \to g_2(A)] \geqslant [A \subseteq A^{-1}] \geqslant [A \equiv A^{-1}]$；

所以，$[g(A) \leftrightarrow g_3(A)] = \min([g_1(A) \wedge g_2(A) \to g_3(A)], [g_3(A) \to g_1(A) \wedge g_2(A)]) \geqslant [A \equiv A^{-1}]$。 □

1.3 定理 对任意 $A_\lambda \in \mathscr{F}(G), (\lambda \in \Lambda)$

$$
\models (\forall \lambda)((\lambda \in \Lambda) \to g(A_\lambda)) \to g(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)
$$

证$[g_1(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)]$

$$= \inf_{x、y\in G} \min(1.1 - \min((\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)(x).(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)(y) + (\bigcap_{\lambda\in\Lambda})(xy))$$

$$= \inf_{x\cdot y\in G}(1.1 - \min(\inf_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda(x). \inf_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda(y)) + \inf_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda(xy))$$

$$\geqslant \inf_{x\cdot y\in G} \min(1.1 - \inf_{\lambda\in\Lambda} \min(A_\lambda(x). A_\lambda(y)) + \inf_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda(xy))$$

$$\geqslant \inf_{x\cdot y\in G} \inf_{\lambda\in\Lambda} \min(1.1 - \min(A_\lambda(x). A_\lambda(y) + A_\lambda(xy))$$

$$= \inf_{\lambda\in\Lambda} [g_1(A_\lambda)]$$

同样可得到$[g_2(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)] \geqslant \inf_{\lambda\in\Lambda} [g_2(A_\lambda)]$

$$\begin{aligned}
\text{因此}, [g(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)] &= \min([g_1(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)], [g_2(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)]) \\
&\geqslant \min(\inf_{\lambda\in\Lambda} [g_1(A_\lambda)], \inf_{\lambda\in\Lambda} [g_2(A_\lambda)]) \\
&\geqslant \inf_{\lambda\in\Lambda} [g_1(A_\lambda) \wedge g_2(A_\lambda)] \\
&= \inf_{\lambda\in\Lambda} [g(A_\lambda)] \quad \square
\end{aligned}$$

1.4 **定理**　对任意 $A\in\mathscr{F}(G)$

$$\models g_2(A) \leftrightarrow (A \equiv A^{-1})$$

证　对任意 $x \in G$, $[g_2(A)] \leqslant \min(1.1 - A(x) + A(x^{-1})$ 及 $[g_2(A)] \leqslant \min(1.1 - A(x^{-1}) + A(x))$，因此，

$$\begin{aligned}
[g_2(A)] &\leqslant \min(\inf_{x\in G} \min(1.1 - A(x) + A^{-1}(x)). \inf_{x\in G} \min \\
&\quad (1.1 - A^{-1}(x) + A(x)) \\
&\geqslant \min([A \subseteq A^{-1}].[A^{-1} \subseteq A]) \\
&= [A \equiv A^{-1}]
\end{aligned}$$

反之，　$[g_2(A)] = \inf_{x\in G}\min(1.1 - A(x) + A(x^{-1})$

$$= \inf_{x\in G}\min(1.1 - A(x) + A^{-1}(x))$$

$$= [A \subseteq A^{-1}]$$

$$\geqslant [A \equiv A^{-1}]$$

因此，$[g_2(A)] = [A \equiv A^{-1}]$ □

1.5 **定理**　设 A∈$\mathscr{F}$(G)，e 是 G 的单位元，则

$$\vDash sg(A) \to (\forall x)((x \in A) \to (e \in A))$$

证 $[g_3(A)] = \inf_{x\cdot y\in G}\min(1.1 - \min(A(x).(A(y)) + A(xy^{-1}))$

$$\leqslant \inf_{x\in G}\min(1.1 - A(x) + A(e))$$

$$= [(\forall x).(x \in A) \to (e \in A))]$$

由 1.2 定理和 1.4 定理，

$[g_1(A) \to (\forall x)((x \in A) \to (e \in A))] \geqslant [g_1(A) \to g_3(A)]$
$\geqslant [A \equiv A^{-1}] = [g_2(A)]$

因此，

$[(\forall x)((x \in A) \to (e \in A))] \geqslant [g_1(A)] \otimes [g_2(A)] =$
$[g_1(A) \wedge g_2(A)] = [sg(A)]$ □

1.6 定理　设 A∈$\mathscr{F}$(G)、B∈$\mathscr{F}$(K)，f：G→K 是一个满同态，则

1. $\vDash g(A) \to g(f(A))$
2. $\vDash g(B) \leftrightarrow g(f^{-1}(B))$

证　　1. $[g_1(f(A))] = \inf_{z\cdot w\in K}\min(1.1 - \min(f(A)(z).f(A)$
$(W)) + f(A)(zw))$

$= \inf_{z\cdot w\in K}\min(1.1 - \min(\sup_{x\in f^{-1}(z)} A(x).\sup_{z\in f^{-1}(w)} A(y)) + \sup_{\substack{x\in y^{-1}(z)\\ y\in f^{-1}(w)}}$

$A(xy))$

$$\geqslant \inf_{z.w\in K} \inf_{\substack{x\in f^{-1}(z)\\ y\in f^{-1}(w)}} \min(1.1-\min(A(x).A(y)+A(xy))$$

$$=\inf_{x.y\in G}\min(1.1-\min(A(x).A(y)+A(xy))$$

$$=[g_1(A)]$$

$$[g_2(f(A))]=\inf_{z\in K}\min(1.1-f(A)(z)+f(A)(z^{-1}))$$

$$=\inf_{z\in K}\min(1.1-\sup_{x\in f^{-1}(z)}A(x)+\sup_{x^{-1}\in f^{-1}(z^{-1})=(f^{-1}(z))^{-1}}A(x^{-1}))$$

$$\geqslant \inf_{z\in K}\inf_{x\in f^{-1}(z)}\min(1.1-A(x)+A(x^{-1})$$

$$=[g_2(A)]$$

因此，$[g(f(A))]\geqslant[g(A)]$

2. $[g_1(f^{-1}(B))]=\inf\limits_{x.y\in G}\min(1.1-\min(f^{-1}(B)(x).f^{-1}(B)$

$(y))+f^{-1}(B)(xy))$

$$=\inf_{x.y\in G}\min(1.1-\min(B(f(x)).B(f(y)))+B(f(xy)))$$

$$=\inf_{z.w\in K}\min(1.1-\min(B(z).B(w))+B(zw))$$

$$=[g_1(B)]$$

其中 $f(x)=z.f(y)=w$，且 $f(xy)=f(x)f(y)=zw$

同样可得到 $[g_2(f^{-1}(B))]=[g_2(B)]$. 因此 $[g(f^{-1}(B))]=[g(B)]$ □.

§2 不分明化正规子群

2.1 定义 设 $A\in\mathscr{F}(G)$，令

$$g_4(A):=(\forall x)(\forall y)((x\in A)\rightarrow(yxy^{-1}\in A))$$

一元不分明谓词 ng、sng$\in\mathscr{F}(\mathscr{F}(G))$分别称为不分明化正规子群和强不分明化正规子群，定义为

$$\mathrm{ng}(A):=g_1(A)\wedge g_2(A)\wedge g_4(A).$$
$$\mathrm{sng}(A):=g_1(A)\mathbin{\dot\wedge} g_2(A)\mathbin{\dot\wedge} g_4(A)$$

2.2 **定理**　设 $A\in\mathscr{F}(G)$，若

$$g_4^{(1)}(A):=(\forall x)(\forall y)((x\in A)\leftrightarrow(yxy^{-1}\in A)$$

及 $g_4^{(2)}(A):=(\forall x)(\forall y)((xy\in A)\leftrightarrow(yx\in A)$

则　　$\models g_4(A)\leftrightarrow g_4^{(i)}(A)$，　　$i=1.2$

证：$i=1$ 时，

$$[g_4(A)]=\inf_{x\cdot y\in G}\min(1.1-A(x)+A(yxy^{-1}))$$
$$\geqslant\inf_{x\cdot y\in G}\min(\min(1.1-A(x)+A(yxy^{-1})).\min(1.1-A(yxy^{-1})+A(x)))$$
$$=[g_4^{(1)}(A)].$$

反之，对任意 x.y∈G，有

$$[g_4(A)]\leqslant\min(1.1-A(x)+A(yxy^{-1})$$

及

$$[g_4(A)]\leqslant\min(1.1-A(yxy^{-1})+A(y^{-1}(yxy^{-1})y))$$
$$=\min(1.1-A(yxy^{-1})+A(x))$$

因此，对任意 x、$y\in G$，

$$[g_4(A)]\leqslant[(x\in A)\leftrightarrow(yxy^{-1}\in A)]$$

从而

$$[g_4(A)]\leqslant\inf_{x\cdot y\in G}[(x\in A)\leftrightarrow(yxy^{-1}\in A)]=[g_4^{(1)}(A)]$$

$i=2$ 时

$$[g_4(A)]=\inf_{x\cdot y\in G}[(x\in A)\leftrightarrow(yxy^{-1}\in A)]$$
$$=\inf_{z\cdot y\in G}[(zy\in A)\leftrightarrow(yz\in A)]$$

$$=[g_4^{-2}(A)]$$

其中 $xy^{-1}=z$ □。

2.3 定义 对任意 $A\in\mathscr{F}(G)$, $A\in G$, 构造 $aA(Aa)\in\mathscr{F}(G)$。

$$x\in aA:=(\exists z)((z\in A)\wedge(az=x))$$

$$(x\in Aa:=(\exists z)((z\in A)\wedge(za=x)))$$

则 $aA(Aa)$ 称为 A 在 G 中的不分明化左(右)陪集。

2.4 定理 对任意 $A\in\mathscr{F}(G)$

$$\models g_4(A)\leftrightarrow(\forall x)(xA\equiv Ax)$$

证
$$[(\forall x)(xA\equiv Ax)]=\inf_{x\in G}[xA\equiv Ax]$$

$$=\inf_{x\in G}\inf_{y\in G}(1-|xA(y)-Ax(y)|)$$

$$=\inf_{x\cdot y\in G}(1-|A(x^{-1}y)-A(yx^{-1})|)$$

$$=[g_4(A)] \quad \square$$

2.5 定理 设 $A\in\mathscr{F}(G)$ 是一个正规不分明集, 则

$\models sg(A)\,\dot{\wedge}(g_2(A)\wedge g_4(A)\rightarrow(\forall x)(\forall y)((xy^{-1}\in A\leftrightarrow(xA\equiv yA)$

证 对任意 x、y、z∈G, 有

$[(xy^{-1}\in A)\rightarrow((x^{-1}z\in A)\rightarrow(y^{-1}z\in A))]$

$=[(xy^{-1}\in A)\,\dot{\wedge}(x^{-1}z\in A)]\propto[y^{-1}z\in A]$

$\geqslant[(xy^{-1}\in A)\wedge(x^{-1}z\in A)]\propto[y^{-1}z\in A]$

$\geqslant[(xy^{-1}\in A)\wedge(x^{-1}z\in A)]\propto[g_1(A)\,\dot{\wedge}((y^{-1}x\in A)\wedge(x^{-1}z\in A))]$

$\geqslant[(xy^{-1}\in A)\wedge(x^{-1}z\in A)]\propto[g_1(A)\,\dot{\wedge}((g_4(A)\,\dot{\wedge}(xy^{-1}\in A))\wedge(x^{-1}z\in A))]$

$\geqslant[g_1(A)\,\dot{\wedge}\,g_4(A)]$

同样有,

$$[(xy^{-1} \in A) \to ((y^{-1}z \in A) \to (x^{-1}z \in A))]$$
$$\geqslant [g_1(A) \mathbin{\&} g_2(A) \mathbin{\&} g_4(A)$$

因此,

$$[(\forall x)(\forall y)((xy^{-1} \in A) \to (xA \equiv yA))]$$
$$\geqslant [\mathrm{sg}(A) \mathbin{\&} g_4(A)]$$

另一方面,由 1.5 定理和 A 的正规性,得

$$[(\forall x)(\forall y)((xA \equiv yA) \to (xy^{-1} \in A))]$$
$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - \inf_{z \in G}(1 - |xA(z) - yA(z)| + A(xy^{-1}))$$
$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - \inf_{y \in G}(1 - |A(x^{-1}z) - A(y^{-1}z)|) + A(xy^{-1}))$$
$$\geqslant \inf_{x \cdot y \in G} \sup_{z \in G} \min(1.1 - (1 - |A(x^{-1}z) - A(y^{-1}z)|) + A(xy^{-1}))$$
$$\geqslant \inf_{x \cdot y \in G} \max(\sup_{z \in G} \min(1.1 - \min(1.1 - A(x^{-1}z) + A(y^{-1}z)) + A(xy^{-1})). \sup_{z \in G} \min(1.1 - \min(1.1 - A(y^{-1}z) + A(x^{-1}z)) + A(xy^{-1}))))$$
$$\geqslant \inf_{x \cdot y \in G} \max(\sup_{z \in G} \max(0. A(x^{-1}z) + \min(1.1 - A(y^{-1}z) + A(xy^{-1})) - 1). \sup_{z \in G} \max(0. A(y^{-1}z) + \min(1.1 - A(x^{-1}z) + A(xy^{-1})) - 1))$$
$$\geqslant \inf_{x \cdot y \in G} \max(\max(0. A(e) + \min(1.1 - A(y^{-1}x) + A(x^{-1}y)) - 1). \max(0. A(e) + \min(1.1 - A(x^{-1}y) + A(xy^{-1})) - 1))$$
$$\geqslant \max(\max(0. \sup_{x \in G} \min(1.1 - A(x) + A(e)) + \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - A(y^{-1}x) + A(x^{-1}y)) - 1). \max(0. \sup_{x \in G} \min(1.1 - A(x) + A(e)) + \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - A(x^{-1}y) + A(xy^{-1} - 1))$$
$$\geqslant \max([\mathrm{sg}(A) \mathbin{\&} g_2(A)]. [\mathrm{sg}(A) \mathbin{\&} ((\forall x)(\forall y)((x^{-1}y \in A)$$

$$\rightarrow (g_4(A) \wedge g_2(A) \wedge (x^{-1}y \in A)))])$$

因此，$[(\forall x)(\forall y)((xA \equiv Ax) \rightarrow (xy^{-1} \in A))]$

$$\geqslant \max([sg(A) \wedge g_2(A)].[sg(A) \wedge g_4(A) \wedge g_2(A)])$$

$$= [sg(A) \wedge g_2(A)]$$

所以，$[(\forall x)(\forall y)(xy^{-1} \in A) \leftrightarrow (xA \equiv yA))]$

$$\geqslant \min([sg(A) \wedge g_4(A)].[sg(A) \wedge g_2(A)])$$

$$\geqslant [sg(A) \wedge g_2(A) \wedge g_4(A))] \quad \square$$

2.6 定理 设 $A \in \mathscr{F}(G)$、$B \in \mathscr{F}(K)$，且 $f: G \rightarrow K$ 是一个满同态，则

$$1. \models ng(A) \rightarrow ng(f(A))$$

$$2. \models ng(B) \leftrightarrow ng(f^{-1}(B))$$

证 显然只须证明

$$1. \models g_4(A) \rightarrow g_4(f(A))$$

$$2. \models g_4(B) \leftrightarrow g_4(f^{-1}(B))$$

它们的证明完全类似于 1.6 定理。 $\square$

2.7 定理 设 $A \in \mathscr{F}(G)$.$e \in K$，且 $f: G \rightarrow K$ 是一个满同态，则

$$\models (f^{-1}(e) \equiv A) \rightarrow ng(A)$$

证 $[f^{-1}(e) \equiv A] = \inf\limits_{x \in G}(1 - |f^{-1}(e)(x) - A(x)|)$

$$= \min(\inf_{x \in f^{-1}(e)} A(x).\ \inf_{x \notin f^{-1}(e)}(1 - A(x)))$$

$$\leqslant \min(\inf_{x \in f^{-1}(e)} \min(1.1 - A(x^{-1}) + A(x)).\ \inf_{x \notin f^{-1}(e)} \min(1.1 - A(x) + A(x^{-1})))$$

$$= \inf_{x \in G} \min(1.1 - A(x) + A(x^{-1})) = [g_2(A)]$$

$$[f^{-1}(e)\equiv A] = \min(\inf_{x\in f^{-1}(e)} A(x).\ \inf_{x\notin f^{-1}(e)}(1-A(x))$$

$$= \min(\inf_{\substack{x.y\in G\\ xy\in f^{-1}(e)}} A(xy).\ \inf_{x\notin f^{-1}e}(1-A(x)))$$

$$\leqslant \min(\inf_{xy\in f^{-1}(e)} \min(1.1-\min(A(x).A(y))+A(xy)).\ \inf_{xy\notin f^{-1}(e)}$$

$$(1-\min(A(x).A(y))))$$

$$\leqslant \min(\inf_{xy\in f^{-1}(e)} \min(1.1-\min(A(x).A(y))+A(xy)).\ \inf_{xy\notin f^{-1}(e)}$$

$$\min(1.1-\min(A(x).A(y)+A(xy)))$$

$$= \inf_{x.y\in G}\min(1.1-\min(A(x).A(y))+A(xy))$$

$$= [g_1(A)]$$

$$[f^{-1}(e)\equiv A] = \min(\inf_{x\in f^{-1}(e)} A(x).A(x).\ \inf_{x\notin f^{-1}(e)}(1-A(x)))$$

$$\leqslant \min(\inf_{\substack{x.y\in G\\ yxy^{-1}\in f^{-1}(e)}} \min(1.1-A(x)+A(yxy^{-1})),\ \inf_{\substack{x.y\in G\\ yxy^{-1}\notin f^{-1}(e)}} \min$$

$$(1.1-A(x)+A(yxy^{-1})))$$

$$= \inf_{x,y\in G}\min(1.1-A(x)+A(yxy^{-1}))$$

$$= [g_4(A)]$$

因此有

$$[f^{-1}(e)\equiv A]\leqslant \min[(g_1(A)],[g_2(A)],[g_4(A)])$$
$$= [ng(A)] \quad \square$$

2.8 定义 设A,B∈$\mathscr{F}$(G),则AB∈$\mathscr{F}$(G)称为A和B的不分明积,定义为

$$z\in AB := (\exists x)(\exists y)((z=xy)\wedge(x\in A)\wedge(y\in B))$$

2.9 定理 对任意A∈$\mathscr{F}$(G)

$$\models g(A)\leftrightarrow(AA\subseteq A)\wedge(A^{-1}\subseteq A)$$

证 $[g_1(A)] = \inf_{x\cdot y\in G}\min(1.1 - \min(A(x).A(y)) + A(xy))$

$= \inf_{xy=z}\inf_{z\in G}\min(1.1 - \min(A(x).A(y)) + A(z))$

$= \inf_{z\in G}\min(1.1 - \sup_{xy=z}\min(A(x).A(y) + A(z))$

$= \inf_{z\in G}\min(1.1 - AA(z) + A(z))$

$= [AA \subseteq A]$

$$[g_2(A)] = \inf_{x\in G}\min(1.1 - A(x^{-1}) + A(x))$$

$$= \inf_{x\in G}\min(1.1 - A^{-1}(x) + A(x))$$

$$= [A^{-1} \subseteq A]$$

因而,有

$[g(A)] = [g_1(A) \wedge g_2(A)] = [(AA \subseteq A) \wedge (A^{-1} \subseteq A)]$ □

2.10 **定理** 对任意 $A\in\mathscr{F}(G)$

$$\models g_4(A) \to (\forall B)(AB \equiv BA)$$

证 由于 $\sup_{xy=z}\min(B(x).A(y)) = \sup_{x\in G}\min(B(x).A(x^{-1}z))$

$\geqslant \sup_{x\in G}\min(B(x).[g_4(A) \wedge (zx^{-1} \in A)])$

$\geqslant \sup_{x\in G}[g_4(A) \wedge \min(B(x).A(zx^{-1})])$

$= [g_4(A) \wedge \sup_{x\in G}\min(A(zx^{-1})、B(x))]$

$= [g_4(A) \wedge \sup_{yx=z}\min(A(y).B(x))]$

$= [g_4(A) \wedge \sup_{xy=z}\min(A(x).B(y))]$

所以,有

$\inf_{B\in\mathscr{F}(G)}\inf_{z\in G}\min(1.1 - \sup_{xy=z}\min(A(x).B(y) + \sup_{xy=z}\min(B(x)$

$\cdot A(y)))$

$$\geqslant \inf_{B\in\mathscr{F}(G)} \inf_{z\in G} \min(1.1 - \sup_{xy\in G} \min(A(x).B(y)) + [g_4(A) \wedge \sup_{xy=z} \min(A(x).B(y))])$$

$$\geqslant \inf_{B\in\mathscr{F}(G)} \inf_{z\in G} [g_4(A)]$$

$$= [g_4(A)]$$

同样

$$\inf_{B\in\mathscr{F}(G)} \inf_{z\in G} \min(1.1 - \sup_{xy=z} \min(B(x).A(y)) + \sup_{xy=z} \min(A(x).B(y)))$$

$$\geqslant [g_4(A)]$$

因此，$[(\forall B)(AB \equiv BA)]$

$$= \inf_{B\in\mathscr{F}(G)} \inf_{z\in G} (1 - |\sup_{xy=z} \min(A(x)、B(y)) - \sup_{xy=z} \min(B(x)、A(y))|)$$

$$\geqslant [g_4(A) \wedge g_4(A)]$$

$$= [g_4(A)] \quad \square$$

2.11 定理　　对任意 A、B∈$\mathscr{F}$(G)

$$\models \mathrm{ng}(A) \wedge \mathrm{ng}(B) \rightarrow \mathrm{ng}(AB)$$

证　$[(AB)^2 \subseteq AB] = \inf_{x\in G} \min(1.1 - ABAB(x) + AB(x))$

$$= \inf_{x\in G} \min(1.1 - \sup_{abcd=x} \min(A(a)、B(b)、A(c)、B(d)) + \sup_{uv=x} \min(A(u)、B(v)))$$

$$= \inf_{x\in G} \min(1.1 - \sup_{\substack{ac=u\\bd=v}} \sup_{uv=x} \min(\min(A(a)、A(c))、\min(B(b)、B(d))) + \sup_{uv=x} \min(A(u)、B(v)))$$

$$\geqslant \inf_{x\in G} \min(1.1 - \sup_{uv=x} \min(\sup_{ac=u} \min(A(a)、A(c))、\sup_{bd=v} \min$$

$$(B(b)、B(d))) + \sup_{uv=x}\min(A(u)、B(v)))$$

$$\geqslant \inf_{x\in G}\inf_{uv=x}\min(\min(1.1 - \sup_{ac=u}\min(A(a)、A(c)) + A(u))、$$

$$\min(1.1 - \sup_{bd=v}\min(B(b)、B(d)) + B(v)))$$

$$\geqslant \inf_{x\in G}\inf_{uv=x}\min(\min(1.1 - \sup_{a,c\in G}\min(A(a)、A(c)) + A$$

$$(ac)), \min(1.1 - \sup_{b,d\in G}\min(B(b)、B(d) + B(bd)))$$

$$\geqslant \inf_{x\in G}\inf_{uv=x}\min([g_1(A)]、[g_1(B)])$$

$$= \min([g_1(A)]、[g_1(B)])$$

同样,有

$$[(AB)^{-1} \subseteq AB] \geqslant \min([g_2(A)].[g_2(B)])$$

最后,

$$[g_4(AB)] = \inf_{x,y\in G}\min(1.1 - (AB)(x) + (AB)(yxy^{-1}))$$

$$= \inf_{x,y\in G}\min(1.1 - \sup_{st=x}\min(A(s).B(t)) + \sup_{uv=yxy^{-1}}\min(A(u).$$

$$B(v)))$$

$$= \inf_{xy\in G}\min(1.1 - \sup_{st=x}\min(A(s).B(t) + \sup_{st=x}\sup_{uv=ysy^{-1}.yty^{-1}}\min$$

$$(A(u).B(v)))$$

$$\geqslant \inf_{x,y\in G}\min(1.1 - \sup_{st=x}\min(A(s).B(t)) + \sup_{st=x}\min(\sup_{u=ysy^{-1}}$$

$$A(u).\sup_{v=yty^{-1}}B(v)))$$

$$\geqslant \inf_{x,y\in G}\inf_{st=x}\min(1.1 - \min(A(s).B(t)) + \min(A(ysy^{-1}).$$

$$B(yty^{-1})))$$

$$\geqslant \inf_{x,y\in G}\inf_{\substack{st=x\\ s,t\in G}}\min(\min(1.1 - A(s) + A(ysy^{-1})).\min(1.1 -$$

$$B(t) + B(yty^{-1})))$$

$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min(\inf_{s \cdot y \in G} \min(1.1 - A(s) + A(ysy^{-1}). \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1$$

$$- B(t) + B(yty^{-1})$$

$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min([g_4(A)].[g_4(B)])$$

$$= \min([g_4(A).[g_4(B)])$$

因此，

$$[\mathrm{ng}(AB)] = \min([g_1(AB)]、[g_2(AB)]、[g_4(AB)])$$

$$= \min([(AB)^2 \subseteq AB]、[(AB)^{-1} \subseteq AB]、[g_4(AB)])$$

$$\geqslant \min([g_1(A)]、[g_1(B)]、[g_2(A)]、[g_2(B)]、[g_4(A)]、[g_4(B)])$$

$$= \min([\mathrm{ng}(A)]、[\mathrm{ng}(B)]) \quad \square$$

§3　同态基本定理

3.1 **定义**　设 $N \lhd G, A \in \mathscr{F}(G), H \in \mathscr{F}(N)$，则 $A/H \in \mathscr{F}(G/H)$ 称为 G 关于正规子群 N 的不分明化商集，定义为

$$xN \in A/H := (\exists a)((a \in xN) \to (a \in A) \wedge (x \in aH))$$

3.2 定理　设 $A/H \in \mathscr{F}(G/N)$ 是 G 的一个不分明化商集，则

$$\models g(A) \wedge (\mathrm{sng}(H) \wedge g_4(H)) \to g(A/H).$$

证　$[g_1(A/H)]$

$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - \min(A/H)(xN)、(A/H)(yN)) + (A/H)(xyN))$$

$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - \min(\sup_{a \in xN} \min(A(a)、H(a^{-1}x))、\sup_{b \in yN} \min(A(b)、H(b^{-1}y))) + \sup_{c \in xyN} \min(A(c)、H(c^{-1}xy)))$$

$$\geqslant \inf_{x\cdot y\in G} \inf_{\substack{a\in xN \\ b\in yN}} \min(1.1-\min(A(a)、A(b)、H(a^{-1}x)、H(b^{-1}x))$$

$$+\min(A(ab)、H(b^{-1}a^{-1}xy))$$

$$\geqslant \inf_{x\cdot y\in G} \inf_{\substack{a\in xN \\ b\in yN}} \min(1.1-\min(\min(1.1-\min(A(a)、A(b)+$$

$$A(ab))、\min(H(a^{-1}x)、H(b^{-1}y)))+H(b^{-1}a^{-1}xy))$$

$$\geqslant \inf_{x\cdot y\in G} \min(1.1-\min([g_1(A)]、\min(H(a^{-1}x)、H(b^{-1}y)))+$$

$$\max(0、[g_4(H)]+H(a^{-1}xyb^{-1}-1))$$

$$\geqslant \inf_{x\cdot y\in G} \min(1.1-\min([g_1(A)]、\min(H(a^{-1}x)、H(b^{-1}y))+$$

$$[g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_1(H) \mathbin{\text{Å}} ((a^{-1}x\in H)\wedge(yb^{-1}\in H))])$$

$$\geqslant \inf_{x\cdot y\in G} \min(1.1-\min([g_1(A)]、\min(H(a^{-1}x)、H(b^{-1}y)))+$$

$$[g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_1(H) \mathbin{\text{Å}} ((a^{-1}x\in H)\wedge(yb^{-1}\in H))]$$

$$\geqslant \inf_{x\cdot y\in G} \min([g_1(A)]、[g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_1(H)])$$

$$=\min([g_1(A)]、[g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_1(H)])$$

同样,

$$[g_2(A/H)]\geqslant \min([g_2(A)]、[g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_2(H)])$$

因此,

$$\begin{aligned}[g(A/H)] &= \min([g_1(A/H)]、[g_2(A/H)]) \\ &\geqslant \min([g_1(A)]、[g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_1(H)]、\\ &\qquad [g_2(A)]、[g_4(H) \mathbin{\text{Å}} g_2(H)]) \\ &\geqslant \min([g(A)]、[\mathrm{sng}(H) \mathbin{\text{Å}} g_4(H)]) \quad \square\end{aligned}$$

3.3 定义 设 $A\in \mathscr{F}(G)$, $e\in K$, $f:G\to K$ 是同态映射,则 $f_A^{1}(e)\in \mathscr{F}(G)$ 称为同态 f 关于 A 的不分明化核,若对任意 $x\in G$,

$$(f_A^{-1}(e))(x) = \begin{cases} A(x), & x \in f^{-1}(e) \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

3.4 定理 设 $f: G \to K$ 是一同态映射，则对任意 $A \in \mathscr{F}(G)$，

$$\models g(A) \to ng(f_A^{-1}(e))$$

证 $[g_1(f_A^{-1}(e))]$

$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - \min((f_A^{-1}(e))(x)、(f_A^{-1}(e))(y)) + (f_A^{-1}(e))(xy))$$

$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - \min(A(x)、A(y)) + A(xy))$$

$$= [g_1(A)]$$

$[g_2(f_A^{-1}(e))]$

$$= \inf_{x \in G} \min(1.1 - f_A^{-1}(e)(x) + f_A^{-1}(e)(x^{-1}))$$

$$= \inf_{x \in G} \min(1.1 - A(x) + A(x^{-1}))$$

$$= [g_2(A)]$$

$[g_4(f_A^{-1}(e))]$

$$= \inf_{x \cdot y \in G} \min(1.1 - f_A^{-1}(e)(x) + f_A^{-1}(e)(yxy^{-1}))$$

$$= \inf_{\substack{x \in f^{-1}(e) \\ y \in G}} \min(1.1 - A(x) + A(yxy^{-1}))$$

$$= \inf_{x \in f^{-1}(e)} \min(1.1 - A(x) + \inf_{y \in G}(yxy^{-1}))$$

$$= \max(\inf_{x \in f^{-1}(e)} \min(1.1 - A(x) + \inf_{y \in G} A(yxy^{-1})、\inf_{z \in f^{-1}(e)} \min (1.1 - A(x) + \inf_{y \in G} A(yzy^{-1})$$

$$\geqslant \max(\min(1.1 - \sup_{x\in f^{-1}(e)} A(x) + \inf_{\substack{x\in f^{-1}(e)\\ y\in G}} A(yxy^{-1}))、\min$$

$$(1.1 - \sup_{z\in f^{-1}(e)} A(z) + \inf_{\substack{z\in f^{-1}(e)\\ y\in G}} A(yzy^{-1})$$

$$= \min(1.1 - \min(\sup_{x\in f^{-1}(e)} A(x)、\sup_{z\in f^{-1}(e)} A(z)) + \inf_{\substack{s\in f^{-1}(e)\\ y\in G}} A(ysy^{-1}))$$

$$\geqslant \inf_{x.z\in f^{-1}(e)} \min(1.1 - \min(A(x)、B(z)) + \inf_{\substack{s\in f^{-1}(e)\\ y\in G}} A(ysy^{-1}))$$

$$\geqslant \inf_{x.z\in f^{-1}(e)} \min(1.1 - \min(A(x)、A(z)) + \inf_{xz\in f^{-1}(e)} A(xz))$$

$$\geqslant \inf_{x.z\in f^{-1}(e)} \min(1.1 - \min(A(x)、A(y)) + \inf_{x.z\in G} A(xz))$$

$$\geqslant \inf_{x.z\in G} \min(1.1 - \min(A(x)、A(z)) + A(xz))$$

$$= [g_1(A)]$$

其中 $S = y^{-1}(xz)y$、$f(s) = e$、$f(xz) = e$，因此，

$$[ng(f_A^{1}(e))]$$

$$\geqslant \min([g_1(A)]、[g_2(A)]、[g_1(A)])$$

$$= \min([g_1(A)]、[g_2(A)])$$

$$= [g(A)] \quad \square$$

3.5 定理(同态基本定理) 设 $f:G\to K$ 是一满同态，$A\in \mathscr{F}(G)$ 且 $e'\in K$，则

$$\models sg(A)\to(\exists h)((h\in K^{G/f^{-1}(e')})\to(h(A/f_A^{1}(e'))\equiv f(A)))$$

证 对任意 $xf^{-1}(e')\in G/f^{-1}(e')$，令 $h(xf^{-1}(e')) = f(x) = y$，则

$$[h(A/f_A^{1}(e'))\equiv f(A)]$$

$$= \inf_{y\in K}(1 - \left|\sup_{h(xf^{-1}(e'))=f(x)=y} (A/f_A^{1}(e'))(xf^{-1}(e')) - \sup_{f(x)=y} A(x)\right|)$$

$$\geqslant \inf_{y\in K}\inf_{f(x)=y}(1 - \left|\sup_{a\in G}\min(A(a)、f_A^{1}(e')(a^{-1}x)) - A(x)\right|)$$

$$= \inf_{y\in K}\inf_{f(x)=y}(1-|\sup_{f(a)=f(x)}\min(A(a)、A(a^{-1}x))-A(x)|)$$

$$= \inf_{y\in K}\inf_{f(x)=y}\min(\min(1.1-\sup_{f(a)=f(x)}\min(A(a)、A(a^{-1}x))$$

$$+A(x))、\min(1.1-A(x)+\sup_{f(a)=f(x)}\min(A(a)、A(a^{-1}x))))$$

$$\geqslant \inf_{y\in K}\inf_{f(x)=y}\min(\inf_{f(a)\in f(x)}\min(1.1-\min(A(a)、A(a^{-1}x))$$

$$+A(x)))、\min(1.1-A(x)+\min(A(x)、A(e))))$$

$$\geqslant \inf_{y\in K}\inf_{f(x)=y}\min(\inf_{f(a)=f(x)}\min(1.1-\min(A(a)、A(a^{-1}x))+[g_1$$

$$(A)\ \mathbb{A}((a\in A)\wedge(a^{-1}x\in A))]、\min(1.1-A(x)+A(e)))$$

$$\geqslant \inf_{y\in K}\inf_{f(x)=y}\min([g_1(A)]、[sg(A)])$$

$$=[sg(A)]$$

其中 $\min(1.1-A(x)+A(e))\geqslant[sg(A)]$ 是据1.5定理的结论

□。

参考文献

[1]. C. L. Chang. Fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl. 24 (1968)190-201.

[2]. C. K. Wong. Fuzzy point and local properties of fuzzy topology. J. Math. Anal. Appl. 46(1974)316-328.

[3]. R. Lowen. Fuzzy topological spaces and compactness. J. Math. Anal. Appl. 56(1976)621-633.

[4]. B. Hutton. Normality in fuzzy toplogical spaces. J. Math. Anal. Appl. 50(1973)74-79.

[5]. P. M. Pu and Y. M. Liu. Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore – Smith convergence. J. Math.

Anal. Appl. 76(1980)571-599.

[6]. R. Lowen. Convergence in fuzzy topological spaces. General Topology Appl. 10(1979)147 – 160.

[7]. ________ The relation between filter net convergence in fuzzy topological spaces. Fuzzy Math. 3(4)(1983)41 – 52.

[8]. A. K. Katsaras, Convergence in fuzzy topological spaces. Fuzzy Math. 4(3)(1984)35 – 44.

[9]. J. B. Rosser and A. R. Turgutte Many – Valued logics (North – Holland. Amsterdam – New York. 1952).

[10]. J. Pavelka. On fuzzy logic Ⅱ. Z. Math. logik Grundlagen Math, 25. 119 – 134(1979).

[11]. A. Rosenfeld, Fuzzy growps. J. Math. Anal, Appl. 35(1971) 512 – 517.

[12]. S. Gottwaid. Set theory for fuzzy sets of higher leval. Fuzzy Sets and Systems 2(1979)125 – 152.

[13]. J. L. Kelley. General Topology (Van Nostrand, New York, 1955).

[14]. M. S. Ying. A new approach for fuzzy topology(I). Fuzzy sets and Systems 39(1991)302 – 321.

[15]. ________. A. new approach for fuzzy topology(Ⅱ). Fuzzy scts and systems 47(1992)221 – 232.

[16]. ________. A new approach for fuzzy topology (Ⅲ). Fuzzy sets and systems 55(1993)193 – 207.

[17]. ________. Compactness in fuzzifying topology. Fuzzy sets and systems 55(1993)79 – 92.

[18]. ________. Fuzzifying unifurm spaces. Fuzzy sets and systems 53(1993)93 – 104.

[19]. Jizhong Shen. Separation axion in fuzzifying topology. Fuzzy

sets and sysems 57(1993)111 - 123.
[20]. ________. Funifying Groups Based on Complete Residuated lattice - Valued logic. Information sciences 75(1993)165 - 186.
[21]. 沈继忠,关于不分明化拓扑中的局部有限性,江西师范大学学报。2(1993),104 - 108.
[22]. ________。基于连续值逻辑拓扑中仿紧性的刻画,科学通报。(1993)2024 - 2027.
[23]. ________. 不分明化拓扑群(Ⅰ),江西师范大学学报。4(1993)299 - 306.
[24]. ________. 不分明化拓扑群(Ⅱ),江西师范大学学报。1(1994)72 - 80。
[25]. 邱道文,沈继忠,不分明化拓扑中局部连通性的若干性质,江西师范大学学报。4(1992).331 - 337.
[26]. 张广济,周丽馥,不分明化拓扑中的 θ-闭包,辽宁师范大学学报。3(1996)202 - 209。
[27]. 张广济,不分明化拓扑中的半开集和半连续函数,大连大学学报。2(1997)152 - 157.
[28]. ________。不分明化拓扑中的 S - 紧性,江西师大学报。2(1998)129 - 134.
[29]. ________,基于多值逻辑上的不分明化群,辽宁师范大学学报。4(1998),273-276.
[30]. Zhang Guangji. θ - Centinuous functions and θ - Compactness in fuzzifying topology. 数学研究与评论。1(1999),57-64.
[31]. 邹祥福,Kuratowski 十四集定理和杨忠道定理在不分明化拓扑中的推广,第九届全国模糊系统理论及应用学术会议论文集。
[32]. 侯炮明,张广济,不分明化拓扑线性空间,大连大学学报。6

(1998),33-37.
[33].罗承忠,模糊集引论,北京师范大学出版社。
[34].汪培庄,李洪兴,模糊系统理论与模糊计算机,科学出版社。

[General Information]
□□=□□□□□□□□
□□=□□□□□
□□=236
SS□=12513686
DX□=
□□□□=1999.3
□□□=□□□□□□□□□

□□
□□
□□
□□
□□
□□□□□□□□□

1□□□□□
2□□□□□□□□□□□
3□□□□□□□□□□□
4□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□

1□□□□□□□□□
2□□□□□□□□□
3□□□□□□
4□□□□□□
5□Moore-Smith□□
6□□□□
7□□□□□
8□□□□□□□□□□□□□□□□□□
9□θ—□□□θ—□□□□
10□Kuratowski□□□□□

□□□□□□□□□□□

1□□□□
2□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□

1□□□□□□□□□□□□□
2□□□□□□□□□□□□□□□□□
3□□□□□□□Lindel□f□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□

1□□□□□

2□□□□□
3□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
1□□□□□□
2□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□
1□□□□
2□□□□□□□
3□Tychonoff□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□S-□□□θ-□
□
1□□□□□□□□□□□□□□
2□□□□□□□□□□□□
3□S-□□□θ-□□
□□□□□□□□□□□□
1□□□□□□□□□
2□□□□□□□□□
3□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□
1□□□□□□□□
2□□□□□□
3□□□□□□
4□□□□□□□□□□
5□□□□
□□□□□□□□
1□□□□□□
2□□□□□□□□□
3□□□□□□□
□□□□